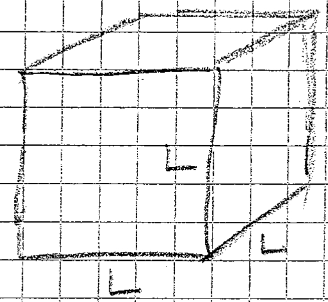
TERMODYNAMIK FÖR FYP010 & FIN400

Förslag till lösningar: 2004-03-11

1)



$V = L^3 \qquad \alpha = \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T}$

$\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T}$

Vid uppvärmning ökar alla sidor med ΔL

$V = (L+\Delta L)^3 \qquad \Delta V = (L+\Delta L)^3 - L^3 =$

$= (L+\Delta L)(L^2 + 2L\Delta L + \Delta L^2) - L^3 =$

$= \cancel{L^3} + 2L^2\Delta L + L\Delta L^2 + L^2\Delta L + 2L\Delta L^2 + \Delta L^3 - \cancel{L^3} =$

$= 3L^2\Delta L + 3L\Delta L^2 + \Delta L^3$

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{L^3} = \frac{3L^2\Delta L}{L^3} + \frac{3L\Delta L^2}{L^3} + \frac{\Delta L^3}{L^3} =$

$= 3\left(\frac{\Delta L}{L}\right) + \underbrace{3\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^3}_{\text{försumbara i vanliga fall}}$

$\therefore\ \beta\cdot\Delta T = 3\cdot\alpha\cdot\Delta T + 3(\alpha\cdot\Delta T)^2 + (\Delta T\cdot\alpha)^3$

$\beta = 3\alpha + 3\alpha^2\Delta T + \alpha^3\Delta T^2$

För metall med $\alpha = 1{,}2\cdot10^{-5}\ K^{-1}$ och $\Delta T = 100°C$:

$3\alpha = 3{,}6\cdot10^{-5}\ K^{-1}$

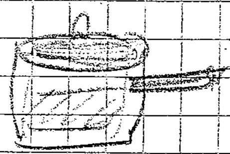
$3\alpha^2\Delta T = 4{,}3\cdot10^{-8}\ K^{-1}$

$\alpha^3\Delta T^2 = 1{,}7\cdot10^{-11}\ K^{-1}$ (väldigt liten)

$\Rightarrow \beta = 3{,}6043$ ca 1 promilles avvikelse

$\boxed{\text{Svar: } \beta = 3\alpha + 3\alpha^2\Delta T + \alpha^3\Delta T^2\text{, avvikelsen ca } 1‰}$

2)



$m_{cu} = 2{,}0\ \text{kg}$

$T_{cu} = (150 + 273)\ \text{K}$

Inga värmeförluster! $m_{H_2O} = 0{,}10\ \text{kg}$

$T_{H_2O} = (25 + 273)\ \text{K}$

$c_{p_{H_2O}} = 4{,}18\ \text{kJ/(kg·K)}$

$c_{p_{cu}} = 390\ \text{J/(kg·K)}$

$Q_{ång} = 2{,}26 \cdot 10^6\ \text{J/kg}$

Värm vattnet: $25 \rightarrow 100^\circ C$: $Q_1 = 75 \cdot 0{,}1 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3 = 31{,}4 \cdot 10^3\ \text{J}$

Ångbildning: $2{,}26 \cdot 10^6 \cdot x$ där x = förångad massa

(Vi antar att allt vatten ej förångas)

Kastrullen:

$150^\circ C \rightarrow 100^\circ C$: $Q_2 = 50 \cdot 2{,}0 \cdot 390 = 39{,}0 \cdot 10^3\ \text{J}$

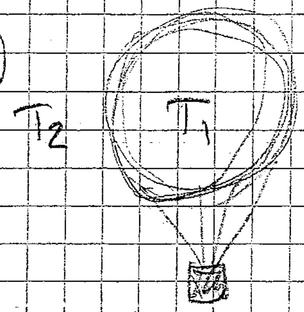
$\therefore\ 31{,}4 \cdot 10^3 + 2{,}26 \cdot 10^6 \cdot x = 39{,}0 \cdot 10^3$

$\Rightarrow x = 3{,}35 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}$

$\therefore$ Sluttemperatur $100^\circ C$, 3,4 g vatten har förångats, resten är i vätskeform

Svar $100^\circ C$, 3,4 g vatten i ångform resten vätska

3)



$V = 750\ m^3$ $\Delta m = 300\ kg$

$T_2 = ?$

$T_1 = (15 + 273)\ K$

$\rho = \frac{m}{V}$

Ideal gas: $pV = nRT$

p och V är konstanta

$\Rightarrow \quad n = \frac{pV}{RT}$

$m = M \cdot n$ M = molmassan

Ändring av massan för luften:

$$m_{kall} - m_{varm} = M(n_{kall} - n_{varm}) =$$

$$= \frac{MpV}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \Delta m$$

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{R\Delta m}{MpV}$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{-R\Delta m}{MpV} + \frac{1}{T_1}$$

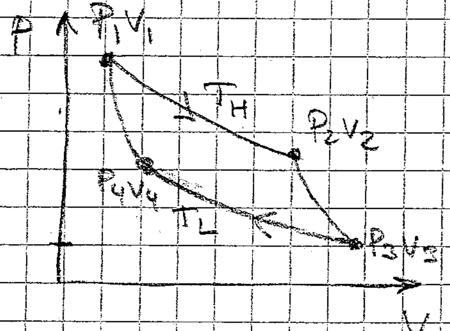
$$T_2 = \frac{1}{-\frac{R\Delta m}{MpV} + \frac{1}{T_1}} =$$

$$= \frac{1}{-\frac{8{,}314 \cdot 300}{28{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{+5} \cdot 750} + \frac{1}{288}} =$$

$$= 430\ K = 157^\circ C$$

$\boxed{\underline{\text{Svar}}\quad 157^\circ C}$

4) Carnotmotor



2 isotermer

2 adiabater

$T_H = 227°C = 500\,K$

$T_L = 27°C = 300\,K$

$n = 0{,}20$ mol $\quad P_3 = 1\cdot 10^5\,Pa$

Ideal tvåatomig gas $\quad V_2 = 2V_1$ (isoterm expansion)

Isotermer: $PV = nRT = \text{konst}$

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad (i)$$

$$P_3V_3 = P_4V_4 \quad (ii)$$

Adiabater: $PV^\gamma = \text{konst}; \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$ (tvåatomig ideal gas)

$$P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma \quad (iii)$$

$$P_4V_4^\gamma = P_1V_1^\gamma \quad (iv)$$

Gaslagen: $V_3 = \frac{nRT_L}{P_3} = \frac{0{,}20\cdot 8{,}314\cdot 300}{1\cdot 10^5} = 4{,}99\cdot 10^{-3}\,m^3$

Adiabater: $PV^\gamma = \underbrace{PV}_{nRT}V^{\gamma-1} = nRTV^{\gamma-1} = \text{konst}$

$$\Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{konst} \quad (v)$$

$$\Rightarrow T_LV_3^{\gamma-1} = T_HV_2^{\gamma-1} \Rightarrow V_2^{\gamma-1} = \frac{T_L}{T_H}V_3^{\gamma-1}$$

$$V_2 = \left(\frac{T_L}{T_H}\right)^{1/(\gamma-1)}\cdot V_3 \Rightarrow V_2 = 1{,}391\cdot 10^{-3}\,m^3$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2/2 = 6{,}96\cdot 10^{-4}\,m^3$$

Gaslagen: $P_1 = \frac{nRT_H}{V_1} = \frac{0{,}20\cdot 8{,}314\cdot 500}{6{,}96\cdot 10^{-4}} = 1{,}195\cdot 10^6\,Pa$

$$P_2 = \frac{nRT_H}{V_2} = P_1/2 = 5{,}98\cdot 10^5\,Pa$$

Adiabaten: $T_LV_4^{\gamma-1} = T_HV_1^{\gamma-1} \Rightarrow V_4 = \left(\frac{T_H}{T_L}\right)^{1/(\gamma-1)}\cdot V_1$

$$\Rightarrow V_4 = \left(\frac{500}{300}\right)^{1/0{,}4}\cdot 6{,}96\cdot 10^{-4} = 2{,}50\cdot 10^{-3}\,m^3$$

4 forts) Gaslagen: $p_4 = \frac{nRT_L}{V_4} = \frac{0{,}20 \cdot 8{,}314 \cdot 300}{2{,}50 \cdot 10^{-3}} =$

$= 2{,}00 \cdot 10^5$ Pa

Alla hörnen klara!

Svar:

$\begin{cases} p_1 = 12 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ V_1 = 0{,}70 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases}$ $\begin{cases} p_2 = 6{,}0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ V_2 = 1{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases}$

$\begin{cases} p_4 = 2{,}0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ V_4 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases}$ $\begin{cases} p_3 = 1{,}0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ V_3 = 5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases}$

Arbetet:

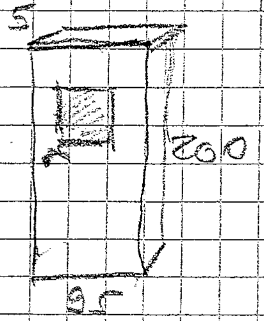
$W_{12} = nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_{in} = 0{,}2 \cdot 8{,}314 \cdot 500 \ln 2 = 576{,}3$ J

$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{300}{500} = 0{,}40$

$W = Q_{in} \cdot 0{,}40 = 230{,}5$ J

Svar $W = 231$ J

5)



$k_{tre} = 0{,}120\ W/(m\cdot K)$

Inne: $20°C$

ute: $8{,}0°C$

Glass: $50 \times 50 \times 0{,}45$ cm

k_{glass}: $0{,}80\ W/(m\cdot K)$

Varmeledningsevne

$$\frac{Q}{t} = k \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Tredør:

$$\frac{Q}{t} = 0{,}120 \cdot 2{,}00 \cdot 0{,}95 \frac{12}{0{,}05 + 0{,}018} = 40{,}2\ W$$

Tekk-lager

Tredør med vindu:

Vinduet: $\frac{Q}{t} = 0{,}80 \cdot (0{,}50)^2 \frac{12}{0{,}0045 + 0{,}12} = 19{,}3\ W$

Resten av døren:

$$\frac{Q}{t} = 0{,}120 \cdot \left(2{,}00 \cdot 0{,}95 - (0{,}5)^2\right) \frac{12}{0{,}05 + 0{,}018} = 34{,}9 W$$

Totalt dør med vinduer:

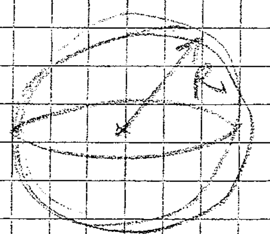
$19{,}3 + 34{,}9 = 54{,}2\ W$

Økning av varmeflaten: $54{,}2 - 40{,}2 = 14{,}0\ W$

eller 35%

Svar: 35%

6)



Mörk nebulosa

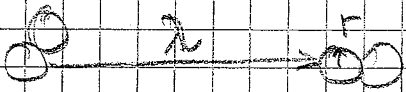
$R = 10$ ljusår

1 ljusår $= 9{,}46 \cdot 10^{15}$ m

$N/V = 50$ atomer/cm^3

$T = 20$ K

$r = 5 \cdot 10^{-11}$ m   H-atoms radie



Monoatomär ideal gas!

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$ medelhast.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 N/V}$$ fri medelväglängd!
$(d = 2r)$

Tiden mellan två kollisioner:

$$t = \frac{\lambda}{v_{rms}} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}\,\pi (2r)^2 N/V \sqrt{3RT}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 \cdot 10^{-3}}}{\sqrt{2}\,\pi (1 \cdot 10^{-10})^2 \underbrace{50 \cdot 10^6}_{\text{atomer/m}^3} \sqrt{3 \cdot 8{,}314 \cdot 20}} =$$

$$= 6{,}4 \cdot 10^8 \text{ s} \approx 20 \text{ år}$$

(Undra på att vätet finns som atomer och inte som molekyler (H_2) – dom träffar ju väldigt sällan några andra H att slå sig ihop med! Nebulosan är i alla fall stor nog $\gg \lambda$)

$\boxed{\text{Svar } 6{,}4 \cdot 10^8 \text{ s}}$