Mekaniska vågor

Mekaniska vågor förutsätter ett medium för att kunna utbredas. Vi kommer här att studera mekaniska vågor dels för att lära oss hur dessa uppför sig och dels för att härleda samband som vi sedan tillämpar på elektromagnetiska vågor. Elektromagnetiska vågor kan utbreda sig i vakuum och för att kunna härleda viktiga samband för dylika krävs kunskaper i elektromagnetisk fältteori.
Det är intressant att notera att samma teori kan användas för så vitt skilda fenomen som gammastrålning och ljusvågor.

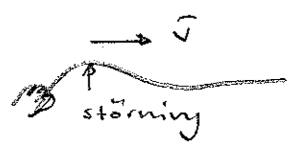
Vi har alla sett exempel på mekaniska vågor i naturen. Det som vi har mest erfarenhet är kanske vågor på en vattenyta.

Vid all form av vågrörelse är det en <u>störning</u> som utbreder sig. Denna kan vara en avvikelse från ett jämviktsläge i rummet, ett övertryck i en gas eller en elektrisk fältstyrka.

Alla mekaniska vågor kräver:

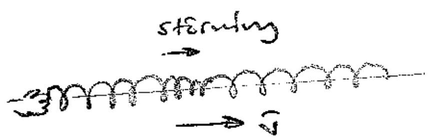
i. en störningskälla
ii. ett medium som kan störas
iii. en fysisk mekanism, d v s en koppling mellan elementen i mediet, genom vilket störningen kan fortplantas i mediet.

Ett exempel på en mekanisk våg är att röra ena änden av ett långt spänt rep upp och ner en gång. Då utbreder sig en puls längs repet. Denna puls kommer att röra sig framåt med konstant fart och pulsens utseende kommer inte att ändras lite medan den färdas längs repet.



När pulsen färdas längs repet är störningen vinkelrät mot utbredningsriktningen. En sådan våg sägs vara <u>transversell</u>.

Om vi i stället har en lång fjäder som vi komprimerar i ena änden får vi på liknande sätt som för repet en puls som utbreder sig. I detta fall är dock störningen parallell med utbredningsriktningen. En sådan våg sägs vara <u>longitudinell</u>.



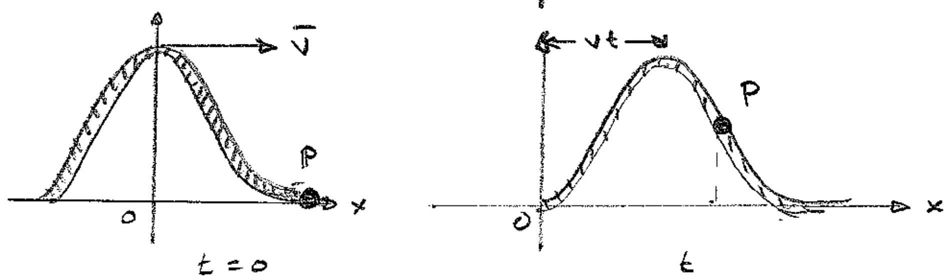
Vi ska nu utveckla en matematisk representation av vågor och vi utgår ifrån pulsen och generaliserar sedan resultaten till alla former av vågor.

Vi studerar en puls, som utbreder sig i samma riktning som x-axeln, vid två olika tider.

$$y(x,t) = y(x - vt, 0)$$

$$\therefore \; y(x,t) = f(x - vt) \longrightarrow \bar{v} \parallel \hat{x}$$

$$y(x,t) = f(x + vt) \longleftarrow \bar{v} \parallel -\hat{x}$$

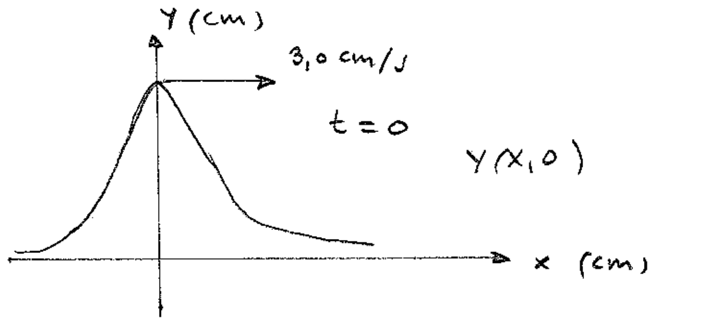


Funktionen y(x,t) kallas ofta <u>vågfunktionen</u> och beror av de två variablerna x och t (om den aktuella vågen är endimensionell).

Exempel 13.1
En puls som utbreder sig längs x-axeln.

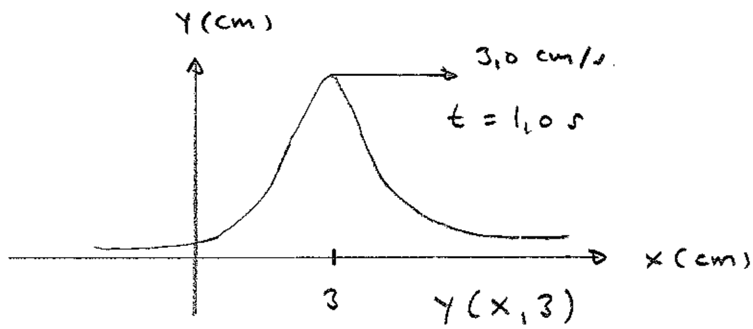
$$y(x,t) = \frac{2{,}0}{(x - 3{,}0\,t)^2 + 1}$$

t i sekunder
alla sträckor i cm
$v = 3{,}0$ cm/s.



$$y(x,0) = \frac{2{,}0}{x^2 + 1}$$

$$y(x,1{,}0) = \frac{2{,}0}{(x - 3{,}0t)^2 + 1}$$



Vi ser att störningen rör sig åt höger.
Maximal störning fås då parantesen är lika med noll.
Det blir den vid stora värden på t om x är stort,

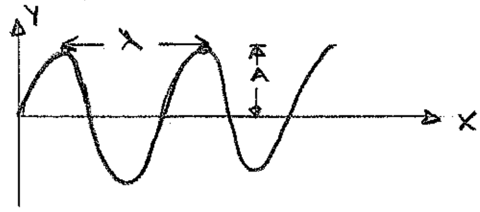
Vågmodellen:

Om vi återvänder till fallet med utbredning längs ett spänt rep och tänker oss att vi rör den ena änden av repet upp och ner, kommer en kontinuerlig störning att utbreda sig. Denna kommer att vara sinusformad.

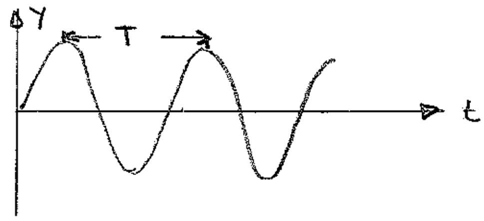
Det som kännetecknar en sådan våg är tre egenskaper:

i. våglängd
ii. frekvens
iii. utbredningshastighet

Våglängden λ är avståndet (längs x-axeln) mellan två identiska punkter längs vågen.



Perioden T är den tid som det tar för ett element i mediet att genomföra en komplett svängning.



frekvens = antal svängn. per sekund

$$f = \frac{1}{T}$$

En annan viktig parameter är vågens **amplitud**, vilket är den maximala avvikelsen från jämviktsläget.

$t = 0$

$y = A \cdot \sin ax$

$a(x+\lambda) = ax + 2\pi$

$\Rightarrow a\lambda = 2\pi$

$\Rightarrow a = \frac{2\pi}{\lambda}$

Fortskridande våg:

$t = 0$

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

allmänt $$y(x,t) = A \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

$v \cdot T = \lambda$ vågen flyttas λ under tiden T.

$\Rightarrow v = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \cdot f$ $\boxed{v = \lambda \cdot f}$

sätt in $v = \frac{\lambda}{T}$ i $y(x,t) = A \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$

$$\Rightarrow y(x,t) = A \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda}{T}t\right)\right] = A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

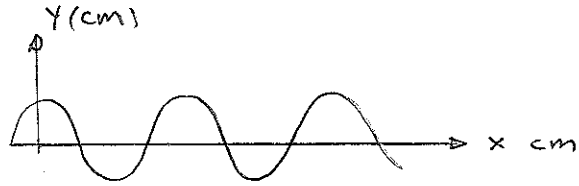
Definiera cirkulära vågtalet k enligt : $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$

Sedan tidigare $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ $\Rightarrow \frac{t}{T} = \frac{\omega}{2\pi} t$

$$\Rightarrow y(x,t) = A \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x - 2\pi \frac{\omega}{2\pi} t\right] = \underline{A \cdot \sin(kx - \omega t)}$$

Allmänt : $\underline{y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \phi)}$ jfr. svängningar

Exempel 13.2
En fortskridande sinusformad våg.



Givet: $A = 15{,}0$ cm $\quad \lambda = 0{,}40$ cm
$f = 8{,}00$ Hz $\quad y(0,0) = 15{,}0$ cm

(A) Sökt: k, T, ω och v

Lösning:
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40{,}0} = 0{,}157 \text{ rad/cm} \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8{,}00} = 0{,}125 \text{ s}^{-1} \text{ el. Hz}$$
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 8{,}00 = 50{,}3 \text{ rad/s} \qquad v = f\lambda = 8{,}00 \cdot 40{,}0 = 320 \text{ m/s}$$

(B) Sökt: faskonstanten ϕ.

Lösning: allmänt $y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \phi)$
$$\Rightarrow y(0,0) = A \cdot \sin\phi = 15 \cdot \sin\phi = 15 \Rightarrow \sin\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \pi/2) = \underline{A \cdot \cos(kx - \omega t)}$$

<u>Den linjära vågekvationen:</u>
$$y(x,t) = f(x - vt) = f(u)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{df}{du} \cdot 1 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 f}{du^2} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{df}{du}(-v) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (-v)^2 \dfrac{d^2 f}{du^2} = v^2 \dfrac{d^2 f}{du^2} \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

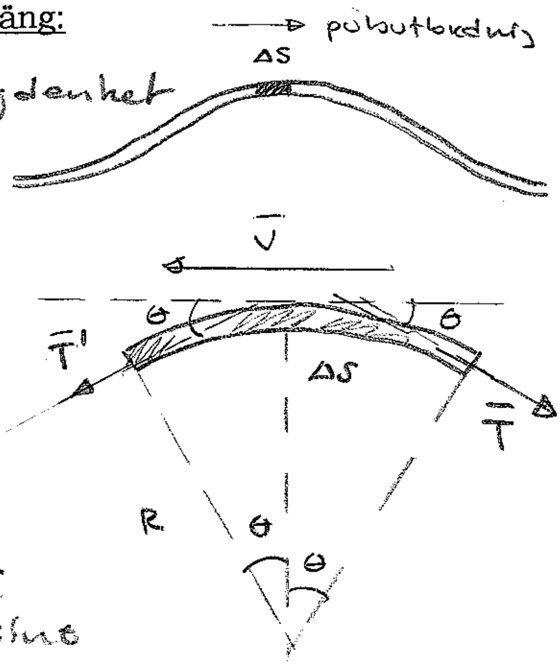
Ex. 13.3
$$y(x,t) = \frac{2{,}0}{(x - 3{,}0t)^2 + 1} \qquad \text{allt i cm, s, cm/s.}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{12(x - 3{,}0t)^2 - 4{,}0}{[(x - 3{,}0t)^2 + 1]^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{108(x - 3{,}0t)^2 - 36}{[(x - 3{,}0t)^2 + 1]^3} = 9{,}0 \, \frac{12(x - 3{,}0t)^2 - 4{,}0}{[(x - 3{,}0t)^2 + 1]^3}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{9{,}0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \underline{\underline{v = \sqrt{9{,}0} = 3{,}0 \text{ cm/s}}}$$

Utbredningshastigheten för en transversell våg på en sträng:



Kraft i radiell led: μ = massa/längdenhet

$$F_r = 2T\sin\theta \approx 2T\theta$$

$$m = \mu\cdot\Delta s = \mu\cdot 2R\theta$$

$$F_r = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow 2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R}$$

$$\Rightarrow T = \mu v^2$$

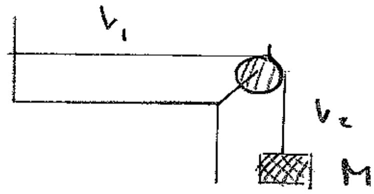
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Obs! Vi har antagit att pulsen har så liten amplitud att approx. $\theta = \sin\theta$ gäller.

I härledningen antar vi att ett koordinatsystem som följer pulsen som utbreder sig på strängen. Dette innebär att strängelement rör sig åt vänster

---

Exempel 13.4
Utbredningshastigheten för en puls i ett snöre



Givet: snörmassa $m = 0{,}300$ kg
$l_1 + l_2 = 6{,}0$ m
$M = 2{,}0$ kg

Sökt: v i snöret.

Lösning: $T = Mg$

$$\mu = m/(l_1+l_2)$$

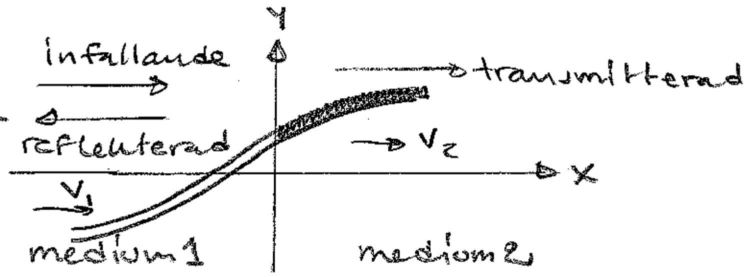
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{m}(l_1+l_2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2{,}0\cdot 9{,}81}{0{,}3}\cdot 6{,}0} = \underline{19{,}8 \text{ m/s}}$$

Reflexion och transmission av vågor.

Så här långt har vi bara studerat vågor som utbreder sig i homogena medier med oändlig utsträckning. Nu ska vi studera en våg som kommer fram till gränsen mellan två medier där förutsättningarna för utbredning ändas abrupt. Vi ska göra detta för följande specialfall; en sträng som är sammansatt så att dess massa per längdenhet ändras från ett värde till ett annat på ett ställe. Vi har tagit två (oändligt långa) snören med olika massa per längdenhet och sammanfogat dem.
I sammanfogningspunkten kommer en del av den infallande vågen att reflekteras (d v s vända i skarven) och en del kommer att transmitteras (d v s ta sig igenom skarven).

Två strängar som är sammanfogade i $x=0$.



Infallande våg $\quad y_i = A_i \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$

Reflekterad våg $\quad y_r = A_r \sin\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$

Transmitterad våg $\quad y_t = A_t \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$

Samma spännkraft T i hela strängen.

Vid $x=0$ gäller: $\quad y_i + y_r = y_t$

$$\Rightarrow \boxed{A_i + A_r = A_t} \quad (1)$$

Även störningens derivata måste vara kontinuerlig.
I $x=0$ gäller då:

$$\frac{d}{dx}(y_i + y_r) = \frac{dy_t}{dx} \Rightarrow \frac{dy_i}{dx} + \frac{dy_r}{dx} = \frac{dy_t}{dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{v_1}(A_i - A_r) = \frac{1}{v_2} A_t} \quad (2)$$

(1) och (2) ger $\quad A_t = \frac{2v_2}{v_2+v_1} A_i \quad$ men $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_i$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{2\sqrt{\frac{1}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{1}{\mu_2}}} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \quad \text{och} \quad A_r = \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_2}} - \sqrt{\frac{1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{1}{\mu_2}}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

A_t är alltid >0 men $A_r < 0$ om $\mu_2 > \mu_1$ "refl. mot tätare medium"

$A_r < 0$ innebär att det sker ett fassprång på π radianer i reflexionspunkten.