# Formelsamling i VEKTORANALYS

Olle Brander

13 Mars, 1997

## A. Vektorer och tensorer

Transformation mellan två ON-baser:

$$(1) \quad \hat{x}'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\hat{x}_j, \qquad i = 1, 2, 3,$$

där $\mathcal{A} = (a_{ij})$ är en ortogonalmatris, $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^t$.

### Exempel på transformationer

Vridning i planet med vinkeln $\alpha$ i positiv led ($\mathcal{R}$ är en ortogonalmatris):

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\alpha)\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Med beteckningen

$$(3) \quad \mathcal{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

för en vridning med vinkeln $\alpha$ kring $z$-axeln kan en allmän, tredimensionell vridning skrivas

$$(4) \quad \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{R}_z(\gamma)\mathcal{R}_y(\beta)\mathcal{R}_z(\alpha).$$

Hopmultiplicerat ger detta

$$(5) \quad \begin{aligned} &\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vinklarna $\alpha, \beta, \gamma$ kallas Eulers vinklar. Utöver vridningar kan vi ha speglingar med $det(\mathcal{A}) = -1$.

**Transformation av vektorer och tensorer**

Mot (1) svarande transformation av (geometrisk) vektor:

$$(6) \quad v_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j, \qquad i = 1, 2, 3$$

I matrisform:

$$(7) \quad \mathbf{v}' = \mathcal{A}\,\mathbf{v} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Pseudovektor:

$$(8) \quad v_i' = det(\mathcal{A}) \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j, \qquad i = 1, 2, 3$$

Andra ordningens tensor:

$$(9) \quad T_{ij}' = \sum_{n,m=1}^{3} a_{in} a_{jm} T_{nm}, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

I matrisform:

$$(10) \quad \mathcal{T}' = \mathcal{A}\mathcal{T}\mathcal{A}^t$$

Andra ordningens pseudotensor:

$$(11) \quad T_{ij}' = det(\mathcal{A}) \sum_{n,m=1}^{3} a_{in} a_{jm} T_{nm}, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

Permutationssymbolen (Levi-Civitas symbol)

$$(12) \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{för} \quad (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 & \text{för} \quad (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

är en helt antisymmetrisk tredje ordningens pseudotensor. För denna gäller den s.k. $\epsilon - \delta$-identiteten

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{nmk} = \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}.$$

Skrivsättet $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \hat{x}_i$ för en vektor motsvaras för en andra ordningens tensor av **dyadskrivsättet**

$$(14) \quad \mathcal{T} = \overleftrightarrow{T} = \sum_{i,j=1}^{3} \hat{x}_i T_{ij} \hat{x}_j.$$

## B. Räkneregler för $\nabla$-operatorn

$$
\begin{aligned}
&(1) & \nabla(\alpha f + \beta g) &= \alpha \nabla f + \beta \nabla g \\
&(2) & \nabla \cdot (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) &= \alpha \nabla \cdot \mathbf{A} + \beta \nabla \cdot \mathbf{B} \\
&(3) & \nabla \times (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) &= \alpha \nabla \times \mathbf{A} + \beta \nabla \times \mathbf{B}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(4) & \nabla(fg) &= (\nabla f)g + f(\nabla g) \\
&(5) & \nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\
&(6) & \nabla \times (f\mathbf{A}) &= (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(7) & \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\
&(8) & \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} \\
&(9) & \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(10) & \nabla \cdot (\nabla f) &= \nabla^2 f \\
&(11) & \nabla \times (\nabla f) &= 0 \\
&(12) & \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\
&(13) & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(14) & \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 \\
&(15) & \nabla \times \mathbf{r} &= 0 \\
&(16) & \nabla r &= \hat{r} \\
&(17) & \nabla &= \hat{r}(\hat{r} \cdot \nabla) - \hat{r} \times (\hat{r} \times \nabla)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(18) & \nabla u(f) &= (\nabla f)\frac{du}{df} \\
&(19) & \nabla \cdot \mathbf{F}(f) &= (\nabla f) \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} \\
&(20) & \nabla \times \mathbf{F}(f) &= (\nabla f) \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f}
\end{aligned}
$$

## C. Kroklinjiga koordinater

Kartesiska koordinaternas basvektorer transformerade till cylinderkoordinaternas basvektorer:

$$(1)\quad \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

Kartesiska koordinater till sfäriska koordinater:

$$(2)\quad \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

Cylinderkoordinater till sfäriska koordinater:

$$(3)\quad \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

$\nabla$-operatorn i allmänna, ortogonala, kroklinjiga koordinater:

$$(4)\qquad \nabla\phi(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\hat{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\hat{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\hat{u}_3$$

$$(5)\qquad \nabla\cdot\mathbf{A}(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i}A_{u_i}\right)$$

$$(6)\qquad \nabla\times\mathbf{A}(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_{u_1} & h_2A_{u_2} & h_3A_{u_3} \end{vmatrix}$$

$$(7)\qquad \nabla^2\phi(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\right)$$

Cylinderkoordinater:

$$(8)\qquad \nabla\phi(\rho,\alpha,z) = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\hat{\alpha} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$(9)\qquad \nabla\cdot\mathbf{A}(\rho,\alpha,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$(10)\qquad \nabla\times\mathbf{A}(\rho,\alpha,z)) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\,\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho\,A_\alpha & A_z \end{vmatrix}$$

$$(11)\qquad \nabla^2\phi(\rho,\alpha,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$(12)\qquad \nabla^2\mathbf{A}(\rho,\alpha,z) = \left[\nabla^2A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}\right]\hat{\rho} + \left[\nabla^2A_\alpha - \frac{A_\alpha}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\alpha}\right]\hat{\alpha} + \nabla^2A_z\hat{z}$$

Sfäriska koordinater:

$$(13) \qquad \nabla\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

$$(14) \qquad \nabla\cdot\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$(15) \qquad \nabla\times\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\,\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & r\,A_\theta & r\sin\theta\,A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$(16) \qquad \nabla^2\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\begin{aligned}(17) \qquad \nabla^2\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = {} & \left[\nabla^2A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2}A_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\hat{r} + \\ & + \left[\nabla^2A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\theta - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\hat{\theta} + \\ & + \left[\nabla^2A_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{\varphi}\end{aligned}$$

# D. Integralsatser

Greens sats i planet:

$$(1) \qquad \oint_C (u\,dx + v\,dy) = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$$

Stokes' sats:

$$(2) \qquad \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$$

Gauss' sats:

$$(3) \qquad \oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

Gaussanaloga satser:

$$(4) \qquad \oint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{F} = \int_V dV\,\nabla\times\mathbf{F}$$

$$(5) \qquad \oint_S d\mathbf{S}\,\varphi = \int_V dV\,\nabla\varphi$$

Stokesanaloga satser:

$$(6) \qquad \oint_C d\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \int_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{F}$$

$$(7) \qquad \oint_C d\mathbf{r}\,\varphi = \int_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\,\varphi$$

Greens första formel:

$$(8) \quad \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, dS = \int_V \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\, dV + \int_V \varphi \nabla^2 \psi\, dV$$

Greens andra formel:

$$(9) \quad \oint_S (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu})\, dS = \int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi)\, dV$$

Greens tredje formel ($\mathbf{r}_P \in V$):

$$\begin{aligned}(10) \quad \varphi(\mathbf{r}_P) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla^2\varphi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|} dV + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\hat{\nu}\cdot\nabla\varphi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|} dS - \frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|}\cdot \hat{\nu}\, dS\end{aligned}$$

## E. Några fysikaliska samband

Newtons gravitationslag:

$$(1) \quad F = -G\frac{mM}{R^2}$$

Coulombs lag:

$$(2) \quad F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Gauss' lag i elläran:

$$(3) \quad \oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q$$

Biot-Savarts lag för magnetfältet från en rak ledare:

$$(4) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{\rho}\hat{\alpha}$$

Amperes lag:

$$(5) \quad \oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = i$$

Kontinuitetsekvationen:

$$(6) \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

Eulers rörelseekvation:

$$(7) \quad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p$$

Navier-Stokes ekvation för kompressibel strömning:

$$(8) \quad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \frac{\eta}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nabla p$$

Navier-Stokes ekvation för inkompressibel strömning:

$$(9) \quad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} + \eta\nabla^2\mathbf{v} - \nabla p$$

Ohms lag:

$$(10) \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\sigma\nabla\phi$$

Fouriers lag:

$$(11) \quad \mathbf{J} = -\lambda\nabla T$$

Newtons värmeöverföringslag:

$$(12) \quad -\lambda\hat{\nu}\cdot(\nabla T)_S = \alpha(T_S - T_0)$$

Värmelednings- eller diffusionsekvationen:

$$(13) \quad \nabla^2 T = \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Laplaces ekvation:

$$(14) \quad \nabla^2\phi = 0$$

Poissons ekvation:

$$(15) \quad \nabla^2\phi = -\rho$$

Poissons vektorekvation:

$$(16) \quad \nabla^2\mathbf{A} = -\mathbf{J}$$

Ömsesidiga energin i ett system av punktladdningar:

$$(17) \quad W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Totala energin i det elektrostatiska fältet från en rymdladdning $\rho$:

$$(18) \quad W = \frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV$$

Totala energin i det elektrostatiska fältet från en ytladdning $\sigma$ på ytan $S$:

$$(19) \quad W = \frac{1}{2}\int_S\sigma(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dS$$

Potentialekvationer för tidsberoende elektromagnetiska fält:

$$(20)\quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Maxwells ekvationer i vakuum:

$$\begin{array}{lrcl}
(21) & \nabla \cdot \mathbf{D} & = & \rho \\
(22) & \nabla \cdot \mathbf{B} & = & 0 \\
(23) & \nabla \times \mathbf{E} & = & -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
(24) & \nabla \times \mathbf{H} & = & \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}
\end{array}$$

Konstituerande samband i vakuum:

$$\begin{array}{lrcl}
(25) & \mathbf{D} & = & \epsilon_0 \mathbf{E} \\
(26) & \mathbf{B} & = & \mu_0 \mathbf{H}
\end{array}$$

Vågekvationen i vakuum:

$$(27)\quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Planvågslösning:

$$(28)\quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0\, f(\hat{k} \cdot \mathbf{r} - ct)$$

## Elasticitetsteori

Töjningstensorn:

$$(29)\quad \overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$(30)\quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

Spänningstensorn $\overleftrightarrow{\sigma} = (\sigma_{ij})$ ger kraften på ett ytelement $d\mathbf{S}$ som en skalärprodukt:

$$(31)\quad d\mathbf{T} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot d\mathbf{S}$$

Hookes lag för en stav:

$$(32)\quad \sigma_{33} = E\epsilon_{33}$$

Hookes lag på tensorform för ett isotropt, elastiskt material:

$$(33)\quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij} Sp(\epsilon_{ij})]$$

Inverst samband:

(34) $\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}Sp(\sigma_{ij})$.

Förskjutningsfältet $\mathbf{u}$, delat i en källfri och en virvelfri del, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, uppfyller vågekvationerna

(35) $\nabla^2\mathbf{u}_i = \frac{1}{v_i^2}\frac{\partial^2\mathbf{u}_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2,$

med vågutbredningshastigheterna

(36) $v_1 = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ respektive $v_2 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$.

Planvågslösningen

(37) $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_i\, f(\hat{k}\cdot\mathbf{r} - v_i t), \quad i = 1, 2$

är för $i = 1$ en transversell skjuvvåg och för $i = 2$ en longitudinell tryckvåg.

## F. Potential och fält från källor och virvlar

Rymdkälla med rymdkälltätheten $\rho(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r}) = \nabla\cdot\mathbf{F} = -\nabla^2\phi$:

(1) $\phi(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|}dV; \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi}\int\rho(\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}_P-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|^3}dV$

Punktkälla med styrkan $q$ i punkten $Q$:

(2) $\phi(\mathbf{r}_P) = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q|}; \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = \frac{q}{4\pi}\frac{\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q|^3}$

Punktdipol med dipolmomentet $\mathbf{m}$ i punkten $\mathbf{r}_Q$:

(3) $\phi(\mathbf{r}_P) = -\frac{1}{4\pi}(\mathbf{m}\cdot\nabla_P)\frac{1}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q|} = \frac{\mathbf{m}\cdot(\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q)}{4\pi|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q|^3};$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = -\frac{1}{4\pi}(\mathbf{m}\cdot\nabla_P)\frac{\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q|^3}$$

Linjekälla med linjekälltätheten $\tau(\mathbf{r})$ på kurvan $C$:

(4) $\phi(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\tau(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}|}|d\mathbf{r}|; \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi}\int_C\tau(\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}_P-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}|^3}|d\mathbf{r}|$

Tvådimensionell punktkälla med källstyrkan $q$ i punkten $Q$:

(5) $\phi(\boldsymbol{\rho}_P) = -\frac{q}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{\rho}_P-\boldsymbol{\rho}_Q|}{\rho_0}; \qquad \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}_P) = \frac{q}{2\pi}\frac{\boldsymbol{\rho}_P-\boldsymbol{\rho}_Q}{|\boldsymbol{\rho}_P-\boldsymbol{\rho}_Q|^2}$

Ytkälla med ytkälltätheten $\sigma(\mathbf{r})$ på ytan $S$, $\sigma = \hat{\nu} \cdot (\mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_-)$:

$$(6) \quad \phi(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|} dS; \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^3} dS$$

Ytdipol med ytdipoltätheten $\mu(\mathbf{r})$ på ytan $S$, $\mu = \phi_+ - \phi_-$:

$$(7) \quad \phi(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\mathbf{r})(\hat{\nu} \cdot \nabla) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|} dS = -\frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\mathbf{r}) \frac{\hat{\nu} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^3} dS;$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\mathbf{r})(\hat{\nu} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^3} dS$$

Potentialen från en ytdipol $\mu(\mathbf{r})$ på ytan $S$, uttryckt med hjälp av rymdvinkelbegreppet, $\Omega$ = rymdvinkeln:

$$(8) \quad \phi(\mathbf{r}_P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\mathbf{r}) d\Omega$$

Rymdvirvel med rymdvirveltätheten $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{F}$:

$$(9) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|} dV; \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^3} dV$$

Ytvirvel med ytvirveltätheten $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ på ytan $S$, $\mathbf{K} = \hat{\nu} \times (\mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_-)$:

$$(10) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}) dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|}; \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^3} dS$$

Virveltråd med virvelstyrkan $i(\mathbf{r})$ längs en kurva $C$ (Biot-Savarts lag):

$$(11) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|}; \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^3}$$

## G. Ekvivalenssatser

1. En ytdipol med ytdipoltätheten $\mu(\mathbf{r})$ på en yta $S$ är ekvivalent med en ytvirvel på $S$ med ytvirveltätheten $\mathbf{K} = (\nabla \mu) \times \hat{\nu}$, där $\hat{\nu}$ är normal till $S$, jämte en virveltråd längs randkurvan $C$ till $S$ med virvelstyrkan $i = \mu$.

2. En rymddipol med rymddipoltätheten $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ har den skalära potentialen:

$$\phi(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|} dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^3} dV$$

   Den är ekvivalent med en rymdkälla med rymdkälltätheten $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ i $V$, jämte en ytkälla med ytkälltätheten $\sigma = \hat{\nu} \cdot \mathbf{P}$ på områdets begränsningsyta $S$.

3. En rymddipol med rymddipoltätheten $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ har vektorpotentialen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|} dV = \frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|^3} dV$$

Den är ekvivalent med en rymdvirvel med rymdvirveltätheten $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{M}$ i $V$ och en ytvirvel med ytvirveltätheten $\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\nu}$ på områdets begränsningsyta $S$.

## H. Randvärdesproblem

Dirichlets inre problem:

(1) $\nabla^2\phi = -\rho$ i $V$, $\quad \phi(\mathbf{r}_S) = f(\mathbf{r}_S)$ på $S$

Neumanns inre problem:

(2) $\nabla^2\phi = -\rho$ i $V$, $\quad (\hat{\nu}\cdot\nabla\phi)(\mathbf{r}_S) = f(\mathbf{r}_S)$ på $S$
$\oint_S f\, dS = -\int_V \rho\, dV$

Churchills inre problem:

(3) $\nabla^2\phi = -\rho$ i $V$, $\quad (\hat{\nu}\cdot\nabla\phi + \alpha\phi)(\mathbf{r}_S) = f(\mathbf{r}_S)$ på $S$, där $\alpha > 0$

Dirichlets yttre problem:

(4) $\nabla^2\phi = -\rho$ utanför $V$, $\phi \to 0$ i $\infty$ och $\phi(\mathbf{r}_S) = f(\mathbf{r}_S)$ på $S$

Neumanns yttre problem:

(5) $\nabla^2\phi = -\rho$ utanför $V$, $\phi \to 0$ i $\infty$ och $(\hat{\nu}\cdot\nabla\phi)(\mathbf{r}_S) = f(\mathbf{r}_S)$ på $S$

Churchills yttre problem:

(6) $\nabla^2\phi = -\rho$ utanför $V$, $\phi \to 0$ i $\infty$ och $(\hat{\nu}\cdot\nabla\phi + \alpha\phi)(\mathbf{r}_S) = f(\mathbf{r}_S)$ på $S$, där $\alpha < 0$

## I. Speglingsmetoden

Spegling i sfär:

(1) $c = \dfrac{a^2}{b}$ och $q' = -\dfrac{a}{b}q$

(2)
$$\begin{aligned}\phi(r,\theta,\varphi) &= \frac{q}{4\pi(r^2+b^2-2rb\,\cos\theta)^{1/2}} - \\ &- \frac{aq}{4\pi b(r^2+\frac{a^4}{b^2}-2\frac{a^2}{b}r\,\cos\theta)^{1/2}}\end{aligned}$$

Spegling i cirkel:

$$(3) \quad c = \frac{a^2}{b}, \quad q' = -q \text{ och } C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$(4) \quad \phi(\rho, \alpha) = -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{a\rho_1}{b\rho_2} = -\frac{q}{4\pi} \ln \frac{a^2(\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos\alpha)}{b^2(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos\alpha)}$$

Kelvins inversionssats:
Om Poissons ekvation $\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})$ med källtätheten $\rho$ i området $r < a (r > a)$, har lösningen $\phi(\mathbf{r})$, så är

$$(5) \quad \phi'(\mathbf{r}) = -\frac{a}{r}\phi(\frac{a^2}{r^2}\mathbf{r})$$

en lösning till Poissons ekvation med källtätheten

$$(6) \quad \rho'(\mathbf{r}) = -\frac{a^5}{r^5}\rho(\frac{a^2}{r^2}\mathbf{r})$$

i området $r > a (r < a)$.