

Föreläsning 2, Fysik B för D2

Thomas Nilsson

October 29, 1997

3 Tillämpningar av första huvudsatsen

3.1 Adiabatiska processer

I en **adiabatisk process** sker inget utbyte av termisk energi med omgivningen, dvs. $Q = 0$. Första huvudsatsen ger då att

$$\Delta U = -W$$

Vid en **adiabatisk fri expansion** utträttat systemet heller inget arbete (se fig. 20.6b), $\rightarrow \Delta U = 0$. Alltså är den **inre energin** oförändrad.

För en adiabatisk expansion av en ideal gas gäller

$$PV^\gamma = \text{konst}$$

vilket kommer att visas i samband med kap. 21.3.

3.2 Isobara processer

Isobara processer sker vid konstant tryck. Här gäller oftast att både $Q \neq 0$ och $W \neq 0$. Arbetet är $W = P(V_f - V_i)$.

3.3 Isokora processer

Vid **isokora processer** (isovolymetriska) är volymen konstant. Då ingen volymsändring sker är $W = 0$, vilket innebär att all termisk energi som tillförs systemet höjer den interna energin (temperaturen) i motsvarande grad.

3.4 Isotermiska processer

Isotermiska processer sker vid konstant temperatur, så den interna energin ändras inte.

$$\Delta U = 0 \rightarrow Q = W$$

Arbete vid isoterm expansion av en ideal gas:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_i}^{V_f} P dV = \\ &= \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = \\ &= nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \\ &= nRT [\ln V]_{V_i}^{V_f} = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \end{aligned}$$

4 Värmeöverföring

Termisk energi överförs från system med högre temperatur till system med lägre temperatur (vi återkommer till detta i samband med **entropi**). Värmeöverföring kan ske genom:

- **värmeledning**: Termisk energi överförs i form av gittervibrationer etc. från ett varmare till ett kallare system. Här gäller:

$$H = -kA \frac{dT}{dx}$$

där H - termisk transferhastighet, $\frac{dT}{dx}$ - temperaturgradienten, A - ytan och k - termiska konduktiviteten. För en kropp med uniformt tvärsnitt som är i kontakt med två reservoarer med temperaturerna T_1 och T_2 är $\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{L}$ vilket innebär att

$$H = kA \frac{T_1 - T_2}{L}$$

- **Konvektion**: Termisk energi överförs genom att den upphettad substansens rörelse.
- **Strålning**: Alla objekt emitterar energi i form av strålning (vi återkommer till detta i Kap. 40) enligt **Stefans lag**

$$P = \sigma A \epsilon T^4$$

där P - utstrålade effekten, σ - $5.669610^{-8} \text{W/m}^2\text{K}^4$, A - ytan, e $[0,1]$ - emissiviteten, T - temperaturen

5 Egenskaper hos ideala gaser

5.1 Kinetisk gasteori för ideala gaser

Mikroskopisk modell, förutsättningar:

- vi har många gasmolekyler, och avståndet mellan dem är stort jämfört med deras utsträckning
- molekylerna rör sig slumpartat map. riktning och hastighet
- molekylerna kolliderar elastiskt med varandra och väggarna så att kinetiska energin och rörelsemängden bevaras
- molekylerna påverkar endast varandra vid kollisioner
- gasen är ren, alla molekyler är identiska

N molekyler i en volym V , en låda med kanten d . Längs x-axeln har en given molekyl hastigheten v_x . Då den kolliderar elastiskt med en vägg får den efter kollisionen hastigheten $-v_x$ i x-led. Rörelsemängdsändringen är:

$$\Delta p_x = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x$$

Väggens rörelsemängd ändras med motsvarande värde, $2mv_x$. Vi sätter F_1 till medelkraften som verkar på väggen pga. molekylen under tiden Δt vilket ger

$$F_1 \Delta t = \Delta p = 2mv_x$$

Molekylen måste röra sig sträckan $2d$ mellan varje kollision, vilket dröjer $\Delta t = 2d/v_x$, så kraften på väggen per kollision är

$$F_1 = \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2d/v_x} = \frac{mv_x^2}{d}$$

För alla molekyler ger detta:

$$F = \frac{m}{d}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2)$$

Medelvärde:

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2}{N}$$

vilket ger:

$$F = \frac{Nm}{d} \overline{v_x^2}$$

I 3D:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$$

då alla tre dimensionerna är likvärdiga.

Den totala kraften som väggen då utsätts för blir:

$$F = \frac{N}{3} (m \overline{v^2})$$

vilket ger trycket:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{d^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{N}{V} \right) m \overline{v^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{N}{V} \right) \frac{m \overline{v^2}}{2} \quad (1)$$

Vi skriver om 1 och använder ideala gaslagen:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) \\ PV &= N k_B T \\ \rightarrow T &= \frac{2}{3 k_B} \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) \end{aligned}$$

Sista ekvationen visar att temperaturen är direkt relaterad till medelvärdet av den kinetiska energin.

Vi kan skriva detta som

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

vilket ger medelvärdet för kinetiska energin per gasmolekyl. Då $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$ gäller att:

$$\overline{E_x} = \frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} k_B T$$

Pss. för y och z . Vi har alltså ett bidrag på $\frac{1}{2} k_B T$ för varje frihetsgrad i systemet. Detta kan uttryckas med **ekvipartitionsteoremet**: *hos ett system i termisk jämvikt är energin lika fördelad över alla frihetsgrader*

5.2 Specifika värmnet

Då en ideal gas värms från temperaturen T_i till T_f kan detta ske på ett flertal sätt. (Olika vägar mellan isotermer i fig. 21.4.) Den inre energin U är enbart beroende av temperaturen och förändras därför inte med vilken väg som tas i pV -diagrammet. Däremot kan arbetet W vara olika, vid konstant volym är ju $W = 0$.

Vi definierar två typer av specifikt värme:

$$\begin{aligned} Q &= nC_V \Delta T \text{ (konstant volym)} \\ Q &= nC_P \Delta T \text{ (konstant tryck)} \end{aligned}$$

För en ideal monoatomisk gas består den inre energin av kinetisk energi hos gasatomernas masscentrum (inga vibrationer, rotationer etc.) Då är, enligt ekvipartitionsteoremet, den inre energin en funktion av T enbart:

$$U = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

Om vi nu tillför systemet energi vid *konstant volym* (se fig. 21.4) så är arbetet som systemet utför noll. Detta ger (1:a huvudsatsen):

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} n R \Delta T$$

dvs. all värme adderas till den interna energin. Vi sätter in specifika värmet:

$$\begin{aligned} nC_V \Delta T &= \frac{3}{2} n R \Delta T \\ C_V &= \frac{3}{2} R \end{aligned}$$

Mao. samma $C_V = 12.5 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ för alla monoatomiska ideala gaser! Se tab. 21.2.

Vi kan skriva

$$\Delta U = nC_V T$$

vilket ger

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$$

Då vi har en isobarisk process (konstant tryck), gäller att det erforderliga värmets är $Q = nC_P \Delta T$. Här ändras volymen, mao. systemet utför ett arbete som är $W = P \Delta V$. Första huvudsatsen ger:

$$\Delta U = Q - W = nC_P \Delta T - P \Delta V$$

Men interna energin beror enbart av temperaturen:

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

Dessutom kan vi skriva allmänna gaslagen (då trycket inte ändras):

$$P \Delta V = n R \Delta T$$

Detta ger:

$$nC_V \Delta T = nC_P \Delta T - nR \Delta T$$

$$C_P - C_V = R \quad (2)$$

Detta leder i sin tur till att $C_P = C_V + R = \frac{5}{2} R = 20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$. Vi kan dessutom definiera:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} \approx 1.67$$

Se tab. 21.2, detta stämmer bra för monoatomiska gaser, men inte för polyatomiska!

5.3 Adiabatiska processer för ideala gaser

Reversibla adiabatiska processer sker *tillräckligt långsamt för att systemet alltid ska vara nära ekvilibrium men snabbt jämfört med hur snabbt systemet kan utbyta termisk energi med omgivningarna*

Vi nämnde innan att för en dylik process hos en ideal gas gäller

$$PV^\gamma = \text{konstant}$$

medan P, V, T varierar.

Bevis: I en adiabatisk process gäller att $Q = 0$, vilket gör första huvudsatsen till $\Delta U = -W$, eller infinitesimalt

$$dU = -dW$$

Antag att vi ändrar volymen och temperaturen infinitesimalt med dV resp. dT . Gasen utför då arbetet $dW = PdV$. Hela ändringen av temperaturen går till att höja interna energin, så dU kan uttryckas som

$$dU = nC_V dT$$

vilket ger enligt första huvudsatsen:

$$nC_V dT = -PdV \quad (3)$$

Tillståndsekvationen $PV = nRT$ kan differentieras med avseende på T ($P = P(T)$ och $V = V(T)$) och ger

$$PdV + dPV = nRdT$$

Vi använder vår tidigare uttryck för dT (3):

$$PdV + dPV = R \frac{dU}{C_V} = -\frac{R}{C_V} PdV$$

Tidigare fick vi att $C_P - C_V = R$ (2), vi sätter in detta och delar med PV :

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = -\frac{C_P - C_V}{C_V} \frac{dV}{V} = (1 - \gamma) \frac{dV}{V}$$

vilket ger:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

Vi integrerar detta:

$$\int \frac{dP}{P} + \gamma \int \frac{dV}{V} = \ln P + \gamma \ln V = \ln[PV^\gamma] = \textit{konst.}$$

vilket ger

$$PV^\gamma = \textit{konst.}$$

För en adiabatisk reversibel process gäller alltså för initial- och finaltillstånd att:

$$P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma$$

Med hjälp av $PV = nRT$ kan vi skriva om detta som:

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$