Föreläsning 6, Fysik B för D2

Thomas Nilsson

November 12, 1997

20 Fotoner

Vi såg i förra föreläsningen att vi måste använda oss av de **komplementära våg- och partikelmodellerna** av ljusets natur. Vi kan alltså inte beskriva det med en klassisk bild enbart. Det blir lätt felaktigt att använda alltför klassiska analogier angående våglängd och frekvens.

Fotonernas partikelstruktur finns i hela spektrum av elektromagnetisk strålning, men det är mer påtagligt vid höga energier (tex. gammafotoner) där fotonen alltid behandlas som en masslös, oladdad partikel.

20.1 Fotonens rörelsemängd

Från relativitetsteori har vi:

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \tag{1}$$

För den masslösa fotonen gäller då att $p = E/c$ (detta fås även från Maxwells ekvationer, formel 34.23), vi har dessutom från tidigare att fotonens energi är $E = hf = hc/\lambda$. Rörelsemängden blir då:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda} \tag{2}$$

21 Partiklars vågnatur

1932 gjorde de Broglie ett omvälvande antagande: *om ljuset har både våg- och partikelnatur så gäller detta kanske för all materia.* Vi hade alltså att fotonens rörelsemängd är relaterad till våglängden genom $\lambda = h/p$. Vi kan på samma sätt definiera en våglängd för en massiv partikel, en sådan har då (ickerelativistiskt) rörelsemängden $p = mv$:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{3}$$

Vidare kan vi definiera en frekvens enligt Planks antagande $E = hf$:

$$f = \frac{E}{h} \tag{4}$$

21.1 De Broglie våglängd i Bohrs modell

Det av Bohrs villkor för sin ursprungliga modell som kan tyckas vara mest gripen ur luften är hur rörelsemängdsmomentet skulle vara kvantiserat. Med hjälp av elektronernas vågrörelsenatur kan man visualisera detta. Antag att elektronerna beskriver en stående våg under sin cirkelrörelse runt kärnan. Då måste cirkelbanan ha en omkrets som är ett helt antal våglängder för att en stabil lösning ska finnas:

$$n\lambda = 2\pi r, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

(3) och relationen $\hbar = h/2\pi$ ger oss då:

$$n(\frac{h}{mv}) = 2\pi r$$

som kan skrivas:

$$mvr = n\hbar \tag{6}$$

21.2 Experimentell verifikation av de Broglies teori

Davidsson och Germer lyckades redan tre år senare med att mäta elektronens våglängd. Genom att studera diffraktion av elektroner mot monokristallina strålmål kunde man verifiera sambandet $p = h/\lambda$.

22 Diffraktion, dubbelspalt

Då partiklar har en vågstruktur kan man föreställa sig att det även är möjligt att utföra typiska vågrörelseexperiment med dem. Vi ska här studera hur elektroner som passerar en dubbelspalt uppför sig.

Vi använder beteckningarna från fig. 41.2 och ser då att villkoret för destruktiv interferens (minima) är:

$$D \sin\theta = \frac{\lambda}{2} \tag{7}$$

För elektroner med våglängden $\lambda = \frac{h}{p}$ och små θ får vi:

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{h}{2p_x D} \tag{8}$$

Vi kan se i fig. 41.3d att elektronerna verkligen uppvisar ett interferensmönster enligt vad man förväntar sig för en dubbelspalt. Trots att elektronerna detekteras som partiklar uppför de sig som vågor då de passerar dubbelspalten, detta gäller även när strömmen är så låg att vi vet att elektronerna passerar dubbelspalten en och en.

Om vi först täcker för den ena spalten och sedan den andra kommer vi att få en intensitetskurva som visas i fig. 41.4, där den detekterade intensiteten $|\psi_1^2| = \psi_1^*\psi_1$ och $|\psi_2^2| = \psi_1^*\psi_1$ är kvadraten på de vågfunktioner ψ_1 och ψ_2 som passerar spalt 1 respektive 2. Summan av dessa blir då $|\psi_1^2| + |\psi_2^2|$, vilket **inte** ger något interferensmönster! Om däremot båda spalterna är öppna samtidigt, passerar den totala vågfunktionen $\psi = \psi_1 + \psi_2$, och det detekterade mönstret beskrivs av $|\psi_1 + \psi_2|^2$.

Då vi täcker för den ena spalten innebär det att vi **lokaliserar** elektronens vågfunktion, och tydligen får det interferensmönstret att försvinna. Vi kan därför inte tala om att elektronen **antingen** passerar igenom den ena eller andra spalten, utan vi tvingas se det som att dess vågfunktion passerar **samtidigt** igenom båda spalterna! Det samma gäller för enskilda fotoner, varje foton *interfererar med sig själv* och ingen annan foton.

22.1 De Broglie våglängd för makroskopiska objekt

För makroskopiska föremål kan vi erfarenhetsmässigt inte detektera någon vågnatur. Enligt (3) ska vi ha en så liten rörelsemängd som möjligt för att få en stor våglängd. Antag att vi skjuter mycket lätta och långsamma gevärskulor som väger $1g$ och rör sig med $50m/s$. (3) ger då:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} Js)}{(1.0 \cdot 10^{-3} kg)(50m/s)} = 1.32 \cdot 10^{-32} m$$

Alla makroskopiska rörelsemängder är alltså alldeles för stora relativt h för att en våglängd ska kunna märkas.

22.2 Tillämpningar

Vi kan utnyttja partiklarnas vågstruktur till att studera fasta ämnen. I **elektronmikroskopet** diffrakteras en parallell elektronstråle mot ett prov, med hjälp av magnetiska linser kan man sedan fokusera elektronerna på en fluorescerande skärm och få en synlig bild. Se fig. 41.6. Då våglängden typiskt är 100 gånger kortare än hos synligt ljus, kan detaljer somär 100 gånger mindre identifieras.

Med hjälp av **röntgendiffraktion** kan man studera gitterstruktur hos fasta material, då **Braggvillkoret** är uppfyllt fås konstruktiv interferens (se fig. 38.22). En annan metod som används i allt större utsträckning är **neutrondiffraktion**. Här utnyttjar man våglängden hos monoenergetiska neutroner från exempelvis en kärnreaktor för att genom Braggspridning studera gitterstruktur.

23 Osäkerhetsrelationen

Heisenberg formulerade 1927 det som kallas för **osäkerhetsrelationen** (eller onogrannhetsrelationen) vilken säger att

om en positionsmätning görs med noggrannheten Δx och samtidigt en mätning av rörelsemängden görs med noggrannheten Δp_x så kan produkten av dessa aldrig bli mindre än $\hbar/2$

Detta innebär:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{9}$$

Detta kan åskådliggöras genom att vi föreställer oss att vi har ett mikroskop där vi kan studera en elektrons bana. För att kunna göra detta, måste minst en foton växelverka med elektronen. Om vi vill göra en god noggrannhetsbestämmning i x-position måste elektronens våglängd vara tillräckligt liten, vi kan inte få ett Δx som är mindre än λ. Men då är rörelsemängden h/λ, och när fotonen växelverkar med elektronen ger det oss en osäkerhet i elektronens rörelsemängd som är:

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \tag{10}$$

Om vi nu tar produkten av osäkerheterna ger det:

$$\Delta x \Delta p_x = \lambda(\frac{h}{\lambda}) = h \tag{11}$$

Detta är den minimala osäkerheten, i realiteten har vi

$$\Delta x \Delta p_x \geq h \tag{12}$$

Med en mer korrekt analys fås en extra faktor $1/4\pi$, vilket ger (9).

Vi ser alltså att vi genom att mäta på ett system simultant påverkar det, så vår noggrannhet kan aldrig bli godtyckligt hög. Detta är emellertid en djupare effekt än bara mättekniskt, vi kommer att se detta bland annat i samband med växelverkansbosoner i partikelfysik.

Vi kan skriva (9) på annan form genom att utnyttja partikelns frekvens. Vid en frekvensmätning har vi att $f = (N \pm 1)/\Delta t$, felet blir då $\Delta f = \pm 1/\Delta t$ vilket leder till:

$$\Delta f \Delta t \approx 1$$

Vi har att $E = hf$, då blir $\Delta E = h\Delta f$ vilket ger:

$$\Delta E \Delta t \approx h \tag{13}$$

Det korrekta uttrycket är

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{14}$$

Att detta också har en mer fundamental innebörd kan ses om man tittar på exciterade tillstånd hos en atom eller en atomkärna. Hos elementarpartiklar med mycket kort livslängd kan detta användas för att bestämma denna. En ρ-meson sönderfaller med en energi som är $485 MeV$ och osäkerheten i energi är $125 MeV$. Detta ger en medellivslängd $\tau = 2\Delta t$ på:

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34} J \cdot s}{(125 MeV)(1.6 \cdot 10^{-19} J/eV)} = 5.25 \cdot 10^{-24} s$$