

Kvantresonanser behandlade i en
komplex rörelsemängdsbas
Kandidatrapport i fysik, svensk sammanfattning
FUFX02-13-03

Jonathan Bengtsson Ola Embréus Vincent Ericsson
Pontus Granström Nils Wireklint

22 maj 2013

Sammanfattning

Resonanser är en viktig egenskap hos öppna kvantsystem. Vi studerar obundna och löst bundna atomkärnsystem. Vi behandlar ^5He och ^6He i en fåkropparsbild som en alfapartikel med en eller två valensneutroner. Teorin för basexpansion förklaras kort och används för att utveckla kärnsystemet i harmoniska oscillatorns bas och rörelsemängdsbasen. Vi utökar rörelsemängdsbasen till det komplexa planet för att bilda den så kallade Berggrenbasen. Vi använder komplexrörelsemängdsmetoden för att återskapa experimentella värden för ^5He resonansen. Berggren

Beteendet hos ett kvantmekaniskt system beskrivs av dess Hamiltonian som består av en rörelsmängdsterm och en potentialterm. Beroende på potentialens form kan systemet ge upphov till bundna och obundna tillstånd, som svarar mot diskreta respektive kontinuerliga energispektrum. Partiklar i ett så kallat *stängt kvantsystem* är alltid bundna och lokaliserade i en ändlig omgivning av potentialen. Ett *öppet kvantsystem* kan ha ett spektrum som är både diskret och kontinuerligt. I det kontinuerliga spektrumet hos ett öppet kvantsystem kan uppstå något som kallas *resonans*. Ett resonanstillstånd är obundet, men diskret och lokaliserat, och brukar kallas *kvasibundet*.

Syftet med detta projekt är att studera dessa resonanser, specifikt hos ${}^5\text{He}$ och ${}^6\text{He}$, lätta atomkärnor som är obunden respektive löst bunden. Vi gör detta genom att betrakta den tidsberoende Schrödingerekvationen, ett egenvärdesproblem

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle.$$

I denna formalism kan ett resonanstillstånd beskrivas med en komplex energi $E = E_0 - i\Gamma/2$, vilket modellerar tillståndets korta livslängd.

Vi studerar Schrödingerekvationen med numeriska beräkningar. Då behöver ekvationen skrivas om på en passande form. Detta görs genom att utveckla ekvationen i en fullständig bas där egenvärdesproblemet kan skrivas med en ändlig Hamiltonianmatris H . Då kan egenvärdesproblemet lösas med en så kallad egenlösaralgoritm. Vi gör en naturlig inskränkning till sfäriskt symmetriska problem, vilket minskar komplexiteten hos problemet och leder till mindre matriser och snabbare beräkningar.

Rapporten behandlar två fullständiga baser, den sfäriska harmoniska oscillatorns bas och rörelsemängdsbasen. Rörelsemängdsbasen är kontinuerlig och kräver diskretisering som utförs med hjälp av Gauss-Legendrekvadratur. Kvadraturen används även för integralberäkningar vid matrisgenerering.

Genom en skalmodell kan ${}^5\text{He}$ -kärnan betraktas som två partiklar, en alfapartikel och en valensneutron. Detta tillåter att problemet reduceras till en dimension. Alfapartikelns och neutronens växelverkan approximeras i skalmodellen med Woods-Saxonpotentialen

$$V(r) = -V_0 f(r) - 4V_{\text{so}} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \frac{1}{r} \frac{df}{dr},$$

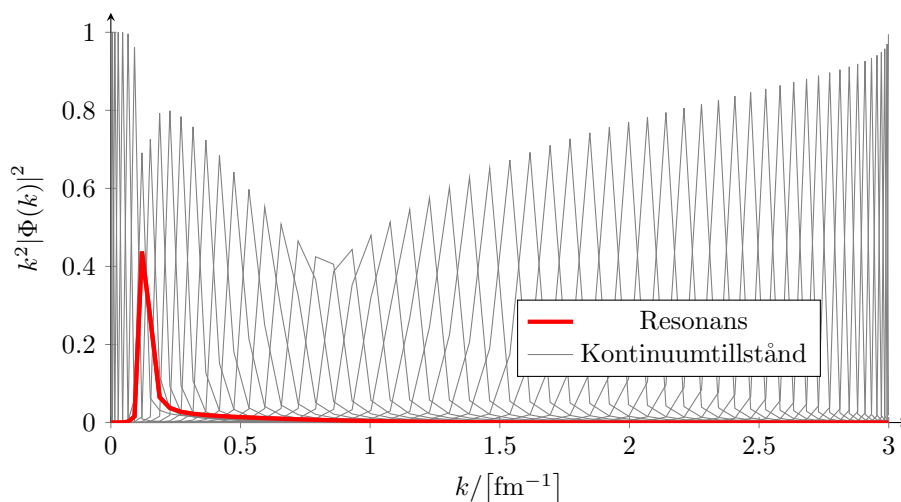
$$f(r) = \left[1 + \exp\left(\frac{r - r_0}{d}\right) \right]^{-1},$$

Parametrarna som används är

Potentialdjup	$V_0 = 47 \text{ MeV}$
Spinn-bankopplingsstyrka	$V_{\text{so}} = -7.5 \text{ MeV}$
Räckvidd	$r_0 = 2 \text{ fm}$
Diffusivitet	$d = 0.65 \text{ fm}$.

Schrödingerekvationen för ${}^5\text{He}$ -system löses i både harmoniska oscillatorns bas och rörelsemängdsbasen. Den harmoniska oscillatorn är ett stängt system med bara bundna egenlösningar och passar därför dåligt för att analysera det öppna ${}^5\text{He}$ -systemet.

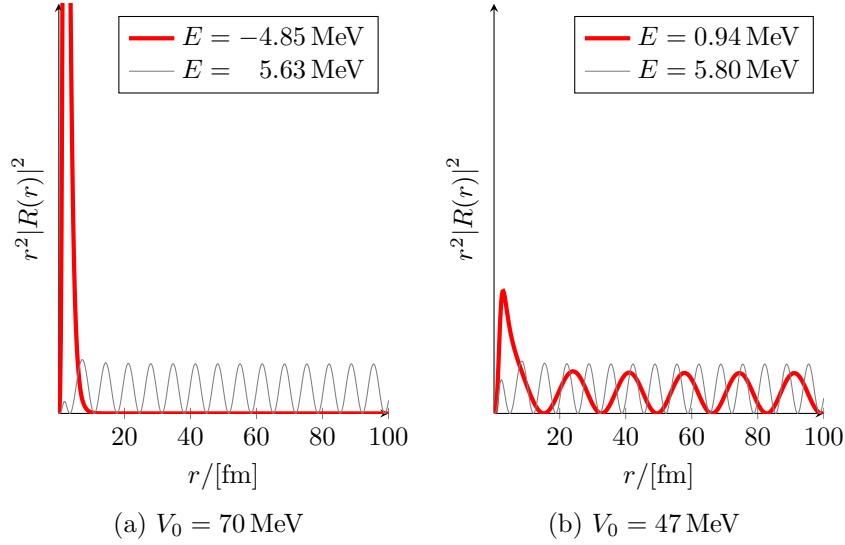
Rörelsemängdsbasens egenlösningar beskriver fria partiklar, vilket ligger mycket närmre den obundna ${}^5\text{He}$ -kärnan. I denna bas ser vi att en av lösningarna till Schrödingerekvationen står ut (Fig. 1). Den befinner sig i kontinuumet, liksom resten av lösningarna, men dess vågfunktion är lokaliserad, ett tecken på att det är en resonans. Vi kunde dock inte kvantifiera resonansens egenskaper, utan bara göra kvalitativa bedömningar.



Figur 1: Rörelsemängdsrummets vågfunktioner till ${}^5\text{He}$. Resonansen står ut tydligt då den är lägre och bredare än de omkringliggande tillstånden.

1 Den komplexa rörelsemängdsbasen

För att bättre beskriva resonansen introducerar vi det komplexa rörelsemängdsplanet, Fig. 3, där energiegenlösningar svarar mot en rörelsemängd $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Bundna lösningar representeras av diskreta poler på positiva imaginäraxeln, obundna lösningar ligger kontinuerligt längs positiva realaxeln och resonanser är poler i fjärde kvadranten. Vi ser kontinuumlösningarna som en kontur, och deformerar denna till att omsluta resonanspolen Fig. 4. Resonansen blir då en av lösningarna till Schrödingerekvationen, tillsammans med kontinuumtillstånden längs konturen och eventuella bundna tillstånd.



Figur 2: ${}^5\text{He}$ Radiella vågfunktioner för två olika starka potentialer. Den unika lokaliserade lösningen till SE markeras i rött och ett vanlig obundet tillstånd visas i grått. Den starka potentialen i (a) ger ett starkt bundet tillstånd medan den svagare i (b) ger ett lokaliserat men obundet tillstånd – en resonans.

Enligt Tore Berggrens teori bildar lösningarna en fullständig bas, ett viktigt resultat som låter oss använda lösningarna för att bygga flerpartikeltillstånd.

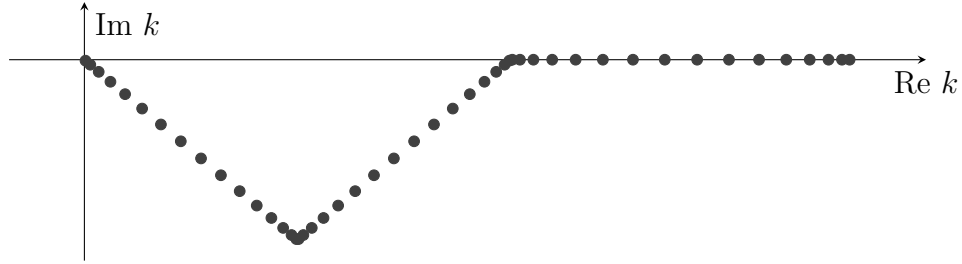
Innan vi utnyttjar detta återgår vi till att studera ${}^5\text{He}$, nu i den komplexa rörelsemängdsbasen. Med den nya metoden lyckas vi återskapa experimentella värden, och vi kan anpassa Woods-Saxonpotentialens parametrar utifrån observerad data. Table 1 visar resultatet av denna anpassning.

2 Flerkropparsproblem och ${}^6\text{He}$

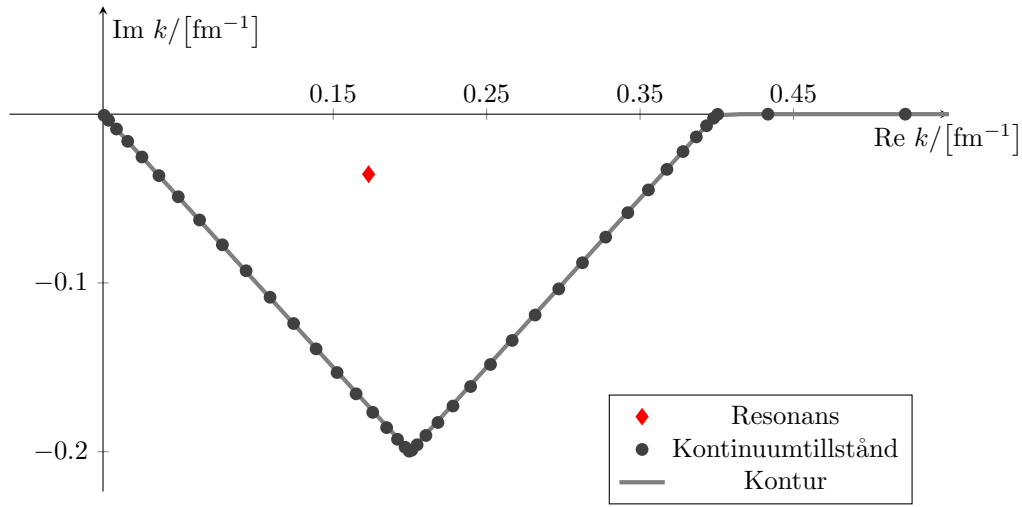
En naturlig utveckling av ${}^5\text{He}$ är att lägga till ytterligare en neutron och på så sätt nå ${}^6\text{He}$. Då vi kan inte längre reducera problemet till en dimension,

Tabell 1: Experimentella och anpassade värden på resonanserna hos ${}^5\text{He}$.

Våg	Experimentellt värde på k_r	Anpassat värde på k_r
$p_{3/2}$	0.1788 - 0.0349i	0.1778 - 0.0376i
$p_{1/2}$	0.3267 - 0.1643i	0.3286 - 0.1630i



Figur 3: Den komplexa konturen som används vid bestämmandet av resonansen.



Figur 4: Lösningar och kontur i det komplexa rörelsemängdsrummet. Notera resonansen i mitten av triangeln.

utan behöver använda mångkropparsteori. Vi sammanfattar de viktigaste resultaten: antisymmetriska fermiontillstånd, ockupationstalrepresentation och rörelsemängdsmomentskoppling. Ett kort avsnitt ger ett förslag på en implementation av ockupationstalsrepresentationen.

Vi betraktar nu ${}^6\text{He}$ och ser det som två sammankopplade ${}^5\text{He}$ -system. Vi kan göra detta då vi endast betraktar tillstånd med samma l -kvanttal. När vi löser Schrödingerekvationen utnyttjar vi den sfäriska symmetrin och kopplar rörelsemängdsmomentet för att reducera matrisstorleken. Eftersom vi nu har två neutroner, måste vi även ta hänsyn till växelverkan mellan dessa. Vi använder två enkla, separabla växelverkan, en gaussisk

$$V(r_1, r_2) = -V_{\text{GI}} \exp\left(-\frac{r_1^2}{R^2}\right) \exp\left(-\frac{r_2^2}{R^2}\right),$$

Tabell 2: Experimentella värden och beräknade energinivåer i ${}^6\text{He}$ med de olika interaktionerna.

J^π	Experimentellt	Ytdelta	Gaussisk
0^+	-0.975	-0.98	-0.97
2^+	0.8-0.55i	1.47-0.47i	-0.97

och en ytdeltainteraktion

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -V_{\text{SDI}}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(r_2 - r_0).$$

Parametrarna för dessa anpassas till grundtillståndet 0^+ i ${}^6\text{He}$, varefter vi undersöker det exciterade 2^+ -tillståndet, en resonans. Här behöver vi använda Berggrenbasen vi skapade från lösningarna till ${}^5\text{He}$ för att överhuvudtaget kunna finna en resonans. Det visar sig att den gaussiska interaktionen inte ger några rimliga resultat, medan ytdeltainteraktionen låter oss återskapa ${}^6\text{He}$ -resonansen. Resultaten sammanfattas i Table 2