

XII. MAKROSKOPISKA KVANTEFFEKTER; JOSEPHSONEFFEKTERNA; ELEKTRONIK - TILLÄMPNINGAR

De supraledande tunneleffekter, som uppkallats efter B D Josephson, rymmer i sig en hel del intressant fysik. Flera av dessa aspekter kommer att beröras i detta avsnitt. En av de starkaste drivkrafterna bakom det stora intresse för Josephson-effekterna och den omfattande forskning, som bedrivs på området, är dock de potentiella användningsområden, som skymtar. Teknisk utveckling bedrivs inom flera områden, t.ex. för snabba datorer och hyperkänsliga detektorer. Behandlingen här kommer att illustreras med diskussion av dessa tillämpningar även om betoningen ligger på de grundläggande delarna. Först ges dock en repetition av supraledande grundbegrepp med tonvikt på egenskaper av betydelse för elektronik-tillämpningar.

A. Supraledning som ett makroskopiskt kvantfenomen.

XII.1. Cooper-par.

Vi kan beskriva det supraledande tillståndet som uppbyggt av par av elektroner, med motriktade impulser och spinn, vilka hålls samman av en attraktiv växelverkan mellan elektronerna. Det "bundna" paret har totalt spinn lika med noll och kan betraktas som en Bose-partikel (trots att ingående medlemmar är fermioner). Bosoner har egenheten att vid låg temperatur kondensera till ett lägsta energitillstånd, ett grundtillstånd. Ju fler Bose-partiklar som redan besätter ett tillstånd, ju högre sannolikhet för en ny partikel att gå in i samma tillstånd (sannolikheten proportionell mot \sqrt{n} , där n är besättningen av grundtillståndet). Så vi väntar oss att alla elektronparen kommer att korreleras; de rör sig i samma tillstånd.

Ett annat sätt att förklara denna korrelation är att säga, att bindingsenergin för ett elektronpar, eller Cooper-par, är låg, en termisk oordning motsvarande endast några Kelvin är tillräcklig för att bryta pären och upphäva supraledningen. Avståndet mellan de två elektronerna i ett bundet par blir då stort, av storleksordningen flera tusen atomavstånd. Inom denna utsträckning av parvägfunktionen befinner sig millioner andra elektronpar. Pären överlappar, och för att Paulis uteslutningsprincip skall gälla för de enskilda elektronerna måste pären samordna sina rörelser. Alla masscentra måste röra sig med samma hastighet, dvs. en och samma vågfunktion beskriver samtliga par-masscentra.

XII.2. BCS koherenslängd; utsträckningen av ett Cooper-par.

Utsträckningen av ett Cooper-par, eller snarare det avstånd över vilket elektronparen är samordnade (de bildar ej individuella "elektronmolekyler"), beror på de individuella elektronernas fria medelväglängder (ℓ). Bardeen, Cooper och Schrieffer (BCS) härledde, i sin berömda teori, ett uttryck för koherenslängden i ett rent material vid $T = 0$, nämligen:

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}$$

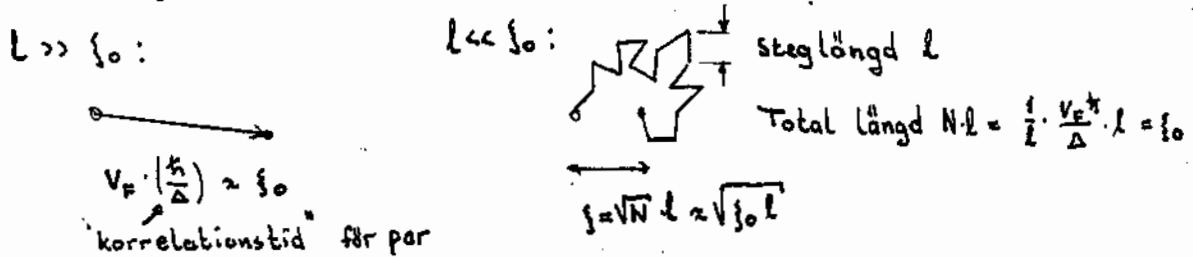
Med rent material menar vi här $\ell \gg \xi_0$, där $\ell = v_F \tau$, v_F fermihastigheten och τ tiden för elastisk spridning av normala elektroner.

För material med kort livstid för elektroner mellan kollisioner ($\ell \ll \xi_0$, "the dirty limit") blir korrelationsavståndet $(\xi_0 \ell)^2$.

Låt oss, genom ett kvalitativt resonemang, få en känsla varifrån dessa längder kommer. Då vi betraktade E-k-diagrammet för en supraledare (i BCS-teorin), såg vi, att det var elektronerna inom ett energiintervall av storleksordningen energigapet, 2Δ , kring fermi-energin, som ändrades från sina nivåer i det normala tillståndet. Eftersom paret

vågfunktion bildas genom superposition av dessa tillstånd, blir dess utsträckning bestämd av den del av k-rummet kring k_F , som är tillgänglig. Denna fås från $\delta E = (\hbar^2 k_F / m) \delta k \approx \Delta$. Således $\xi_0 \approx 1/\delta k \approx \hbar v_F / \Delta$ (vilket är av samma storleksordning som det mera rigoröst härledda BCS-värdet), $\hbar v_F / \pi \Delta$.

ξ_0 är det avstånd en elektron färdas under tiden \hbar/Δ . Denna tid är en slags korrelations-tid för elektronpar och, igen, bestäms av det energiområde inom vilket de normala elektron-tillstånden påverkas. Denna energiskala påverkas ej av fria medelväglängden l , men det gör däremot korrelationslängden. Avståndet mellan två elektroner, som rör sig tiden \hbar/Δ med hastigheten v_F medan de stokastiskt sprids med en fri medelväglängd l , ligger inom $(v_F (\hbar/2\Delta) l)^2 = (\xi_0 l)^2 = \xi$, vilket följer av "Brownsk rörelse":



Lägg märke till att, för litet l , elektronernas läge är korrelerade över ett område $(\xi_0 l)^2$ medan hastighetskorrelationerna förloras bortom ett område av storleksordningen l^2 . Detta är viktigt för supraleadarens elektrodynamiska egenskaper, då de elektromagnetiska fälten karakteriseras av korta väglängder.

ξ bestäms av Δ - ju lägre energigap och övergångstemperatur, ju längre koherenslängd. Exempelvis är ξ_0 för Pb ($T_C \approx 7.2K$) ca 80 nm och för Al ($T_C \approx 1.2K$) ca 1600 nm. I en amorf metall, t.ex. Bi (med extremt kort fri medelväglängd $l \approx$ atomavstånd) blir ξ typiskt ca 50 Å.

Calculated intrinsic coherence length and London penetration depth, at absolute zero
(After R. Meservey and B. B. Schwartz)

Metal	Intrinsic Pippard coherence length ξ_0 in 10^{-6} cm	London penetration depth λ_L in 10^{-6} cm	ξ_0 / λ_L
Sn	23.	3.4	6.2
Al	160.	1.6	100.
Pb	8.3	3.7	2.2
Cd	76.	11.0	6.9
Nb	3.8	3.9	0.98

Ur Kittel:
Intr. Solid State Physics

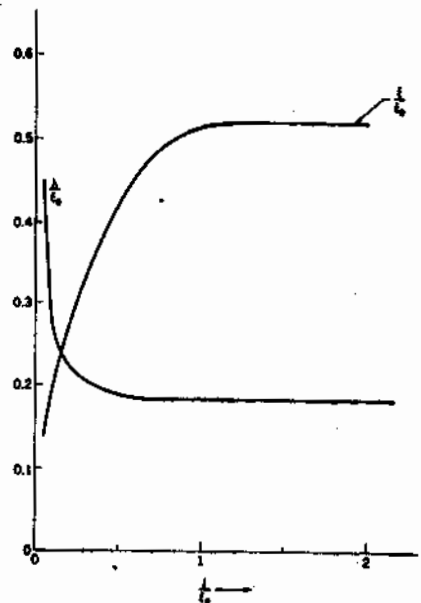


Figure 26 A schematic variation of the penetration depth λ and the coherence length ξ as functions of the mean free path l of the conduction electrons in the normal state. All lengths are in units of ξ_0 , the intrinsic coherence length. The curves are sketched for $\xi_0 = 10\lambda_L$. For short mean free paths the coherence length becomes shorter and the penetration depth becomes longer. The increase in the ratio λ/ξ favors type II superconductivity.

XII.3. Vågfunktion för elektronparen.

Låt oss nu betrakta vår makroskopiska vågfunktion, som beskriver kondensatet av elektronpar och vilken vi tecknar

$$\psi(r) = \sqrt{\rho(r)} e^{i\phi(r)} \quad \text{XII.3.1}$$

där ρ , tätheten av superelektroner och ϕ är reella funktioner av r (vektor). (ρ och n_s är båda mått på tätheter av supraledande elektroner.)

Elektriska strömmen fås genom att låta den kvantmekaniska strömoperatören verka på vågfunktionen. Vi betraktar först fallet utan magnetiskt fält ($A = 0$).

$$j = qe^*v = \frac{e^*}{m^*} P = \frac{e^*}{m^*} \text{Re}\{\psi^*(-i\hbar\nabla)\psi\} = \frac{e^*\hbar}{2m^*i}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad \text{XII.3.2}$$

$$j = \frac{\hbar e^*}{m^*} \rho \nabla\phi \quad \text{XII.3.3}$$

Impulsmomentet för ett elektronpar är som väntat

$$p = m^*v = \hbar\nabla\phi \quad \text{XII.3.4}$$

Om ρ ej varierar med tiden, ger Schrödingerekv. (vilken gäller för hela kondensatet såväl som för varje par):

$$\hbar \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\mu \quad \text{XII.3.5}$$

där μ är den kemiska potentialen hos elektronparen.

XII.4. Resistanslöshet.

Vi kan kvalitativt förstå den egenskap som ursprungligen gav namn till supraledningsfenomenet. Elektronparen är låsta sinsemellan och beskrivs av en vågfunktion med en väl bestämd fas. Skulle vi ha en elektrisk potentialskillnad mellan två delar av en supraledare, får vi även en skillnad i kemisk potential och en fasdifferens som varierar med tiden. Alla paren beskrivs ej längre av samma vågfunktion. Det är energetiskt fördelaktigare för alla elektronparen att anta en driftshastighet än att låta en potentialskillnad uppstå.

XII.5. Inverkan av magnetiskt fält. Diamagnetism.

Från kvantmekaniken vet vi, att då ett magnetiskt fält läggs på får vi ersätta impulsoperatören

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - e^*A \quad \text{XII.5.1}$$

där A är den magnetiska vektorpotentialen ($B = \nabla \times A$)

(Vi kunde alternativt säga, att under inverkan av en vektorpotential

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi} \rightarrow \sqrt{\rho} e^{i\phi + \frac{ie^*}{\hbar} \int_2^1 A \cdot d\ell}$$

dvs. vågfunktionen har ett magnetfältsberoende fasskift,

$$\phi_2 - \phi_1 = \phi_2 - \phi_1 + \int_1^2 \frac{e^*}{\hbar} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{Gradienten } \nabla \left[\sqrt{\rho} e^{i\phi} + \frac{ie^*}{\hbar} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] = \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar} \mathbf{A} \right) \sqrt{\rho} e^{i\phi}.$$

Uttrycket för elektronparströmmen blir

$$\mathbf{j}_s = \frac{e^*}{m^*} \text{Re} \{ \psi^* (-i\hbar \nabla - e^* \mathbf{A}) \psi \} = \frac{e^* \hbar}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad \text{XII.5.2}$$

eller

$$\mathbf{j}_s = \frac{e^* \rho_s}{m^*} (\hbar \nabla \phi - e^* \mathbf{A}) \quad \text{XII.5.3}$$

Denna fundamentala ekvation leder direkt till den ideala diamagnetismen (Meissner-effekten) hos en supraledare, ty

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = \frac{\hbar e^* \rho_s}{m^*} \nabla \times \nabla \phi - \frac{(e^*)^2 \rho_s}{m^*} \nabla \times \mathbf{A} = - \frac{(e^*)^2 \rho_s}{m^*} \mathbf{B} \quad \text{XII.5.4}$$

kombinerad med Maxwells ekvation

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{ger}$$

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B} / \lambda^2 \quad \text{XII.5.5}$$

där $\lambda^2 = m^* / \mu_0 \rho (e^*)^2$.

I en riktning, \mathbf{x} , vinkelrät mot ett magnetiskt fält i en yta fäs $\mathbf{B} = B_0 e^{-x/\lambda}$. Inträngningsdjupet, λ , varierar med temperaturen som $\lambda(0) / \{1 - (T/T_c)^4\}^{1/2}$.

XII.6. Kvantiserat flöde.

Vi såg att magnetiska flödestätheten innuti en supraledare blir noll. Men vad händer i en supraledande ring? (Eller i en typ II supraledare med inneslutna normala områden?) Eftersom vågfunktionen måste vara entydigt bestämd då vi gått runt ett varv kring en sluten kontur:

$$\oint_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = n 2\pi \quad \text{XII.6.1}$$

(Vilket är samma uttryck som Bohr-Sommerfelds kvantiseringsregel $\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = n\hbar$)

Väljer vi nu en väg, C, väl inuti supraledaren så att $\mathbf{j} = 0$ får vi från ekv. XII.5.3.

$$n 2\pi = \oint_C \frac{e^*}{\hbar} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{e^*}{\hbar} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{e^*}{\hbar} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{e^*}{\hbar} \Phi \quad \text{XII.6.2}$$

Dvs. det magnetiska flödet i ringen är kvantiserat

$$\phi = n \frac{h}{e^*} = n \frac{h}{2e} = n\phi_0$$

XII.6.3

$$\phi_0 \approx 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Weber (Vs)}$$

XII.7. Grundläggande elektrodynamiska ekvationer.

Vårt postulat att superelektronerna befinner sig i ett makroskopiskt kvanttillstånd ledde till följande två ekvationer (vi undertrycker vektorbeteckningen):

$$\left\{ \begin{array}{l} j_s = \frac{e^* g_s}{m^*} (\hbar \nabla \phi - e^* A) \end{array} \right. \quad \text{XII.7.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mu \end{array} \right. \quad \text{XII.7.2}$$

För enkelhetens skull bortser vi från (små) variationer i kemiska potentialer för paren, så $\nabla \mu = e^* \nabla U$, dvs. den andra ekvationen ovan blir $\hbar \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} = -e^* \nabla U$.

Vi kan alternativt ge uttryck för elektronparens hastighet

$$\nabla \times v_s = -eB/m \quad \text{XII.7.3}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = \frac{e}{m} (-\nabla U - \frac{\partial A}{\partial t}) = -\frac{e}{m} E \quad \text{XII.7.4}$$

Maxwells ekvationer gäller för den totala strömmen $j = j_s + j_n$, där j_n är bidraget från de normala elektronerna (excitationer ur grundtillståndet). Ohms lag gäller för dessa, $j_n = \sigma'_n E$, där σ'_n är skilt från konduktiviteten i det normala tillståndet. (Om inte annat så är tätheten av normala elektroner högst temperaturberoende.)

Kombinerat får vi de klassiska ekvationerna för en tvåvätskemodell:

$$\frac{m}{e^2 n_s} \nabla \times j_s = -B$$

Londons ekv. ($n_s =$ täthet av superelektroner)

XII.7.5

$$\frac{m}{e^2 n_s} \frac{\partial j_s}{\partial t} = -E$$

$$j_n = \sigma'_n E$$

Ohms lag

$$j = j_s + j_n$$

Två-vätskemodell

När fasen hos den supraledande vågfunktionen är viktig, använder vi oss i stället av ekvationerna XII.7.1 och XII.7.2.

XII.8. Elektromagnetisk respons.

Vi har dels ett rumsberoende (ändlig penetration av ett magnetiskt fält) dels ett frekvensberoende. Då frekvensen $\omega > \omega_g = 2\Delta/\hbar$ får vi parbrytning och således en stark absorption.

Ren resistanslöshet existerar endast för $\omega = 0$. Vid ändliga frekvenser finns det alltid förluster, men dessa blir betydande först i radiofrekvens- och mikrovågsområdet. Vi betraktar därför tre frekvensområden; dc, rf/ μ -våg och sub-mm (far IR).

XII.8a. dc, lågfrekvens.

Vi har redan diskuterat resistanslösheten och Meissnereffekten i denna region. Den senare gav att $B \rightarrow 0$ för $d \gg \lambda$ medan för tunna filmer, där $d < \lambda$ fås endast en partiell flödesutträngning.

I elektronksammanhang kan vi utnyttja Meissnereffekten på olika sätt, t.ex. i ideala elektromagnetiska skärmar (de fungerar ända ned till $\omega = 0$ i motsats till normala metallskärmar som släpper in lågfrekventa magnetiska fält) och i flödestransformatorer. Flödet i en supraledningskrets är konstant varför en ändring i en (extern) del kompenseras av en motsvarande ändring i en annan del (t.ex. i god kontakt med en känslig magnetometer).

XII.8b. rf och mikrovågsuppförande.

Vi hade

$$\frac{\hbar m}{e^2 n_s} \frac{\partial J_s}{\partial t} = -E$$

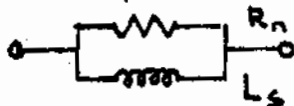
$$J_n = \sigma'_n E$$

Antar vi nu ett periodiskt ($e^{i\omega t}$) beroende hos fält och strömmar får vi att supraledaren (vi betraktar en sådan med $d < \lambda$) beskrivs av en komplex konduktivitet $\sigma(s)$:

$$J = \sigma(s) E = (\sigma'_n + \sigma_s) E$$

där $\sigma_s = n_s e^2 / i\omega m$

Vi kan beskriva supraledaren med en ekvivalent krets



där R_n är resistansen i den normala kanalen och L_s är kinetiska induktansen i supraledande kanalen. Den lagrade energin i L_s är den kinetiska energin hos superelektronerna. Då den supraledande kanalen är resistanslös är σ_s en ren induktans.

Vi kan omvandla den ekvivalenta parallellkretsen till en seriekrets:

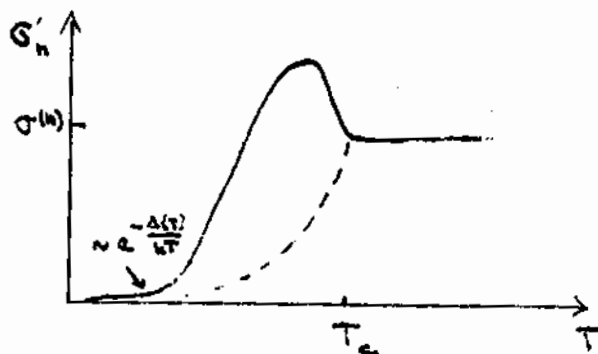
$$Z(s) = \frac{R_n i\omega L_s}{R_n + i\omega L_s} = R_n \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{i\omega L_s}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

där $\tau = L_s / R_n$

Vi ser att serieresistansen ökar som ω^2 vid låga frekvenser.

XII.8c. Normalkonduktansen.

Vid beräkning av σ'_n måste man ta hänsyn till koherensfaktorer mellan elektron- och hållliknande excitationer. Vi ger oss ej in på dessa komplicerade uttryck utan nöjer oss med att ge ett schematiskt temperaturberoende. Tyvärr är σ'_n ej en universell funktion av temperaturen utan måste utvärderas för varje material. Utseendet av $\sigma'_n(T)$ är dock kvalitativt likartat och vid låg temperatur fås alltid att $\sigma'_n \sim e^{-\Delta/kT}$.



Den streckade linjen är en vanligt förekommande approximation för σ'_n :

$$\sigma'_n = \frac{n_n e^2 \tau}{m}$$

där $n_n = n - n_s = n \left(\frac{T}{T_c} \right)^4$.

XII.9. Ytimpedans hos supraledare i mikrovågsområdet.

Vi skall först beräkna skindjupet i en supraledare. Utan förskjutningsströmmar fås från Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B = \mu_0 J = \mu_0 \sigma^{(s)} E \end{cases}$$

där $\sigma^{(s)} = \sigma'_n + \sigma_s = \sigma'_n + \frac{ne^2}{i\omega m}$

Således $\nabla \times \nabla \times B = -\nabla^2 B = -\mu_0 \sigma^{(s)} \frac{\partial B}{\partial t}$

och motsvarande för E-komponenten

Med periodiska lösningar av formen $e^{i(\omega t - kx)}$ fås

$$-k^2 = \mu_0 \sigma_n(s) i\omega = \mu_0 \sigma_n' i\omega + \frac{\mu_0 n e^2}{m} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\delta_n^2}$$

där $\delta_n^{-2} = \mu_0 \sigma_n' \omega$

För låga resp höga frekvenser fås

$$k \rightarrow -i/\lambda \quad \omega \ll (\mu_0 \sigma_n' \lambda^2)^{-1}$$

$$k \rightarrow -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}\delta_n} \quad \omega \gg (\mu_0 \sigma_n' \lambda^2)^{-1}$$

dvs supraledarens respons går från dc-supraledarlik till normallik, då frekvensen ökar och mer av strömmen går genom den normala kanalen.

Låt oss nu beräkna ytimpedansen hos en supraledare.

$$Z(s) = R(s) + iX(s) = E_t(x=0) / \int_0^\infty J_t(x) dx$$

där t betyder att vi tar transversella komponenten. Då $B \rightarrow 0$, då $x \rightarrow \infty$ får vi från Ampères lag

$$B_t(0) = \mu_0 \int_0^\infty J_t(x) dx$$

där J är linjära ytströmtätheten (A/m). Från Maxwells ekv $\nabla \times E = -\partial B / \partial t$; varför

$$kE_t(0) = \omega B_t(0)$$

och $Z(s) = \frac{\omega \mu_0}{k} = \frac{i\omega \mu_0 \lambda}{(1+i\lambda^2/\delta_n^2)^{1/2}}$

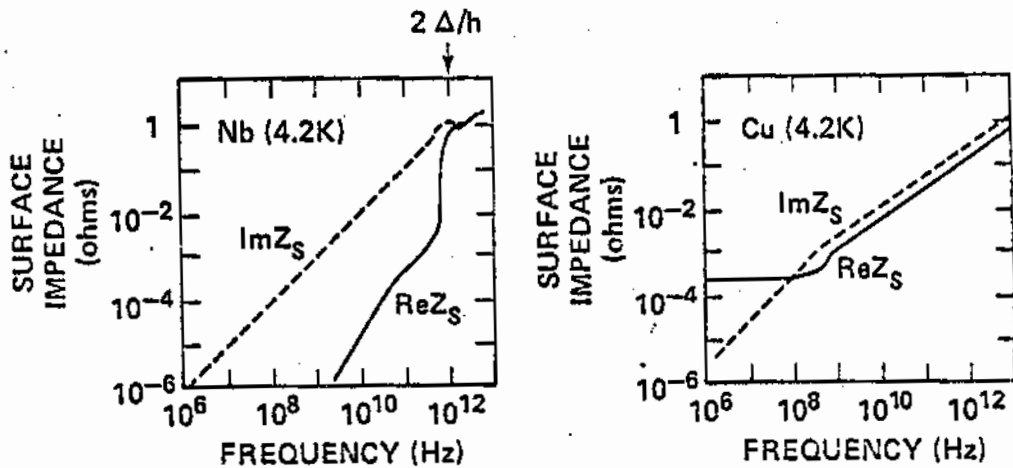
I den "vanliga" gränsen $\delta_n \gg \lambda$:

$$Z(s) = i\omega \mu_0 \lambda + \frac{1}{2} \omega \mu_0 \lambda^3 / \delta_n^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0^2 \sigma_n' \lambda^3 + i\omega \mu_0 \lambda$$

Den resistiva delen $\propto \omega^2$ medan ytinduktansen ($\mu_0 \lambda$) är oberoende av frekvens i denna gräns.

För jämförelse ges impedansens frekvensberoende för koppar och supraledande niob vid 4.2 K i nedanstående figur.

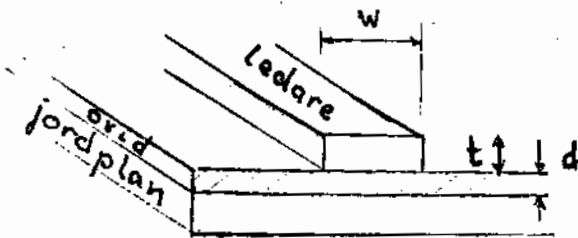
Resonatorer med mycket höga Q-värden har tillverkats i supraledande material. Tex har man kommit upp till Q-värden närmare 10^{10} med supraledande Nb i X-bandet (ca 10^{10} Hz). Sådana kaviteter kan komma till användning i linjära accelerators.



XII.10. Transmissionsledningar

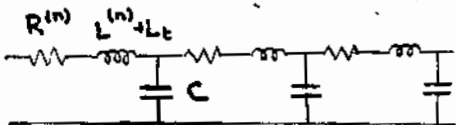
Vid höga frekvenser, som är aktuella t ex i datorer med korta omslagstider, blir vanliga transmissionsledningar problematiska. En kort puls breddas avsevärt under sin framfart, även då kretsarna är tätt packade. Supraledande material har avsevärda fördelar - ledningarna är närmast förlustfria, de har ringa dispersion och går att skala ned vid miniatyrisering lättare än normala metallförbindningar.

Här betraktar vi en striplinegeometri som följande:



För enkelhets skull antar vi att både ledare och jordplan är av samma material.

Normal ledare



$$\delta^2 = (\mu_0 \sigma^{(n)} \omega)^{-1}, \text{ skin-djup}$$

$$L(\text{per lngdenh}) \sim \mu_0 (d+2\delta)/W$$

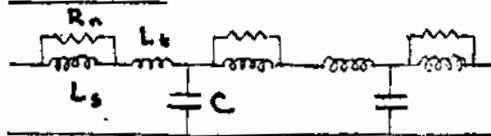
$$C(\text{per lngdenh}) = \epsilon W/d$$

$$R(\text{per lngdenh}) = \rho / \delta W = 1/\sigma^{(n)} \delta W$$

$$v_{\text{fas}} = (LC)^{-1/2} = \bar{c} \sqrt{d/d+2\delta}$$

där $\bar{c} = (\mu_0 \epsilon)^{-1/2}$

Supraledare



$$\lambda^2 = \mu_0 n_s e^2 / m \quad \text{penetrationsdjup}$$

$$L(\text{per lngdenh}) = \mu_0 (d+2\lambda)/W$$

$$C(\text{per lngdenh}) = \epsilon W/d$$

$$R^{(s)}(\text{per lngdenh}) = (\lambda/\delta_n)^3 R_n$$

$$v_{\text{fas}} = \bar{c} \sqrt{d/d+2\lambda}$$

Normal ledare

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \sqrt{\frac{d(d+2\delta)}{W^2}}$$

$$\alpha^{(n)} \text{ dämpning/längdenhet} = \frac{R}{2Z} = \frac{1}{\sigma^{(n)} \delta} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{d(d+2\delta)}}$$

Supraleidare

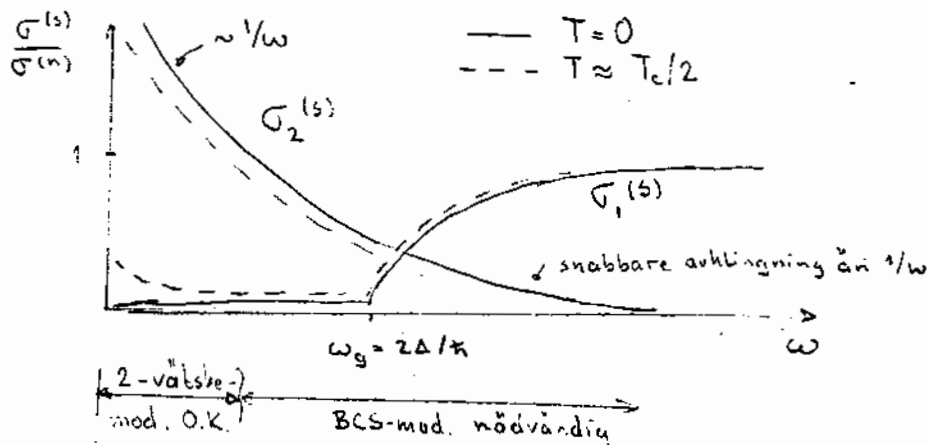
$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \sqrt{\frac{d(d+2\lambda)}{W^2}}$$

$$\alpha^{(s)} = (\lambda/\delta_n)^3 \alpha^{(n)}$$

(δ_n i supraleidare bestäms av σ_n' , ej av $\sigma^{(n)}$).

XII.11. Mycket höga frekvenser

Vid mycket höga frekvenser kan elektroner exciteras upp till tillstånd ovanför energigapet. Även vid $T = 0$, där tätheten av normala elektroner vid ferminivån är noll, kommer konduktiviteten hos en supraleidare att ha en dissipativ (reell) del för $\omega > \omega_g = 2\Delta/h$. Två-vätskemodellen är ej tillämplig vid dessa höga frekvenser. Konduktiviteten $\sigma(s) = \sigma_1(s) + i\sigma_2(s)$, där $\sigma_{1,2}(s)$ är Kramer-Kronig-relaterade, har följande schematiska frekvensberoende:



Vid låga frekvenser:

$$\sigma_1(s) \rightarrow \sigma_n'$$

$$\sigma_2(s) \rightarrow \sigma_s$$

där σ_n' och σ_s är konduktiviteter hos de normala och supraleidande kanalerna i två-vätskemodellen.

B. Svagt kopplade supraledare

Vi betraktar nu två supraledare. Grundtillstånden i supraledarna kan beskrivas av var sin vågfunktion. Hålls de två supraledarna väl isär, så händer intet, de är oberoende av varandra. Förs de däremot ihop i metallisk kontakt, så kopplas tillstånden - är de av samma material, beskrivs båda av en gemensam vågfunktion. Vad händer dessförinnan, då avståndet mellan supraledarna är mycket litet? Det verkar rimligt, att faserna i de två supraledarna kopplar succesivt, så att vi får en bestämd fasskillnad mellan dem.

B.D. Josephson betraktade tunnling mellan två supraledare och förutsade att inte bara elektroner utan även elektronpar kunde penetrera isolatorbarriären. Detta kan tyckas vara förvånande vid första påseende. Utvecklar vi strömmen mellan två lika supraledare i potenser av tunneling-matrisen T (som avtar exponentiellt med separationsavståndet) fås den vanliga tunnelströmmen som en term i T². Strömmen ändras stegvis vid gapspänningen 2Δ/e. För två elektroner att samtidigt tunnla oberoende av varandra väntar man sig ett strömbidrag proportionellt mot T⁴ och ett strömsteg vid Δ/e. Dvs om sannolikheten för enstaka elektroner att tunnla är av storleksordningen 1 av 10¹⁰, så torde sannolikheten för två-partikel-tunneling bli försvinnande liten, 1:10²⁰. Emellertid visar det sig att om man gör en fullständig beräkning får man en elektronparström proportionell mot T², dvs av samma storleksordning som den normala tunnelströmmen.

Josephson-effekten begränsas inte bara till tunnelövergångar, den är generell för en svag länk kopplande två supraledare.

XII.12. Grundläggande Josephson-ekvationerna

Här genomför vi endast ett kvalitativt resonemang och följer i stort behandlingen i "The Feynman Lectures on Physics, III".

Den makroskopiska vågfunktionen för superkondensatet ändras på samma sätt som vågfunktionerna för de enskilda paren. Dvs Schrödingerekvationen för det makroskopiska tillståndet i en supraledare blir:

$$\partial\psi/\partial t = (-i/\hbar)\mu\psi \tag{XII.12.1}$$

där μ är kemiska potentialen för ett elektronpar.

Tar vi även hänsyn till en svag koppling, ε, mellan två supraledare, fås:

$$\partial\psi_1/\partial t = -(i/\hbar)(\mu_1\psi_1 + \epsilon\psi_2) \tag{XII.12.2}$$

$$\partial\psi_2/\partial t = -(i/\hbar)(\epsilon\psi_1 + \mu_2\psi_2) \tag{XII.12.3}$$

Sätt nu in uttrycken för vågfunktionerna $\psi_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\phi_1}$ och $\psi_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\phi_2}$ (för enkelhets skull $\rho_1 = \rho_2$) och vi får

$$\dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2 = (2/\hbar)\epsilon\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) \tag{XII.12.4}$$

$$\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1 = -(1/\hbar)(\mu_2 - \mu_1) \tag{XII.12.5}$$

Täthetsändringarna motsvarar en ström mellan supraledarna, och om elektroner tillförs från en källa:

$$j = j_0 \sin(\phi_2 - \phi_1) \quad \text{XII.12.6}$$

dvs en maximal strömtäthet j_0 kan flyta med en konstant fasdifferens, vilket senare innebär att $\mu_2 = \mu_1 = 0$, ingen potentialdifferens.

I ett fält har vi att $i\hbar\nabla \rightarrow i\hbar\nabla + e^*A$, varför ekvationerna ovan övergår till:

$$j = j_0 \sin(\phi_2 - \phi_1 - (2e/\hbar) \int_1^2 A \cdot dx) \quad \text{XII.12.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2 - \phi_1 - (2e/\hbar) \int_1^2 A \cdot dx) = -(1/\hbar)(\mu_2 - \mu_1) = \frac{2eV}{\hbar} + \frac{s_1^2}{\hbar_1} \Delta T dx \quad \text{XII.12.8}$$

Då de flesta experiment utföres vid konstant temperatur, kan vi försumma entropitermen i det sista uttrycket och med förenklade beteckningar får vi Josephsons grundläggande ekvationer:

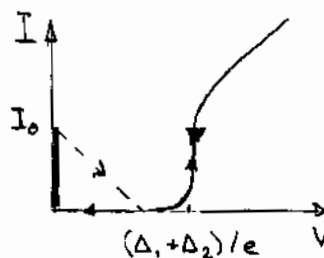
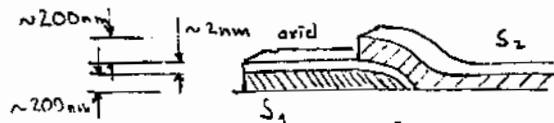
$$j = j_0 \sin\phi \quad \text{XII.12.9}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \quad \text{XII.12.10}$$

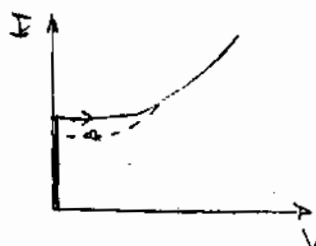
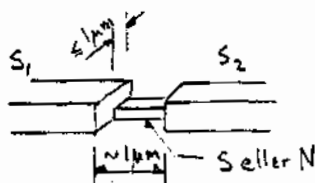
XII.13. Olika typer av element

En svag länk mellan två supraledare, som förmår släppa genom elektronpar, kan tillverkas på flera olika sätt. I figuren nedan ges exempel på tre olika slags grundtyper: tunnelövergång (eller S-I-S), mikrobrygga (inkl S-N-S) och punktkontakt.

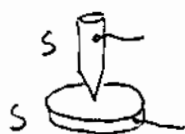
Tunnelövergång (S_1 -I- S_2):



Mikro-
brygga



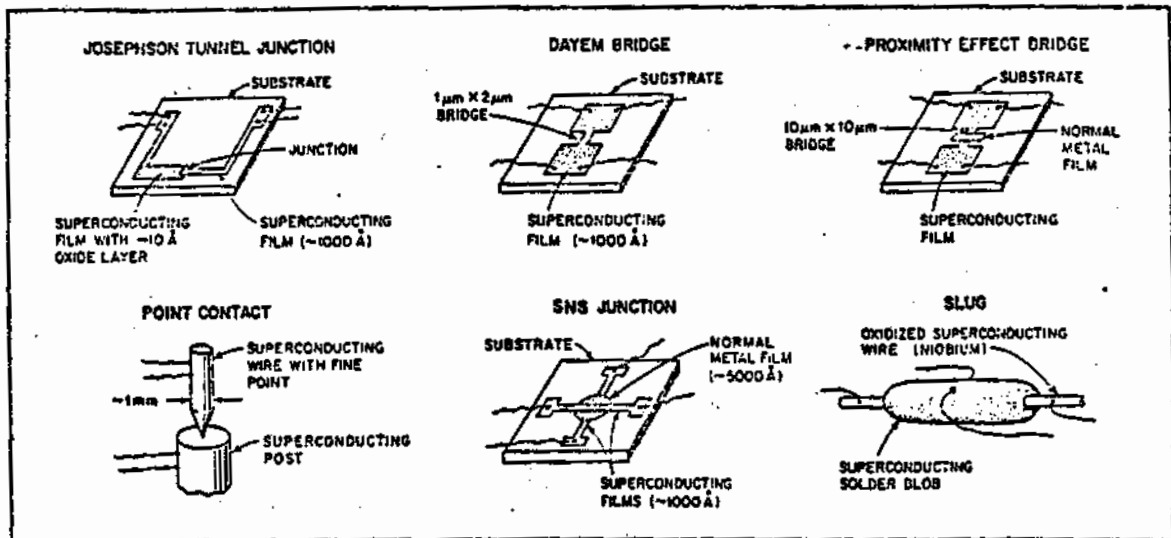
Punkt-
kontakt



Tunnelövergångar av t ex $Pb/Pb_xO_y/Pb$, $Pb-In-Au/oxid/Pb-Bi$ och $Nb/Nb_xO_y/Pb$ har tillverkats. Isolatortjockleken är typiskt 1-5 nm för en oxid. Halvledare och halvmetaller kan även användas som barriärskikt. Kritiska strömtätheter hos Josephsonströmmen av storleksordningen $10^4-10^5 A/cm^2$ är möjliga. Elementets relativt höga kapacitans medför hysteres i I-V-karakteristiken. Oxiden kan tillväxa termiskt eller genom anodisk oxidation i ett syreplasma. I det senare fallet har man två konkurrerande mekanismer: oxidation och sputtering av ytskiktet genom att syre (och argon) slår ut atomer. Ett reproducerbart oxidlager med en tjocklek bestämd av anodspänningen och gastrycket resulterar. Önskar man en reproducerbarhet i kritiska Josephsonströmmen av några procent (vilket är aktuellt för datortillämpningar) måste barriärens genomsnittliga tjocklek kontrolleras inom en bråkdel av en Ångström. Blyoxiden fördärvas vid upprepade nedkylningar/upptiningar. Tillsatser av In och Au förbättrar hållbarheten avsevärt. Övergångsmetaller ger i allmänhet mycket tåliga oxider, men förynboxid fås en rel. hög dielektricitetskonstant och kapacitans. Tunnelövergångens relativt höga kapacitans kan bli en begränsande faktor för högfrekvenstillämpningar.

Den andra typen av vanligt förekommande Josephsonövergång är en mikrobrygga, där den "svaga länken" kan bestå av en supraledare eller av en normal metall. Dimensionerna hos bryggan är typiskt mindre än $1 \mu m$. Kapacitansen blir låg, men det blir, i allmänhet, också resistansen, varför det kan uppstå svårigheter med koppling till element. Ofta fungerar en mikrobrygga endast inom ett snävt temperaturområde strax under T_c .

En punktkontakt har fördelen att man kan justera dess kritiska ström genom att variera det tryck, som spetsen kontakterar det supraledande stödet med. Det är relativt lätt att få god elektromagnetisk koppling till en punktkontakt, men den lider av dålig reproducerbarhet samt känslighet för elektriska chocker och mekanisk "pick-up" av brus.



XII.14. Jämförelse mellan supraledare och svaga länkar

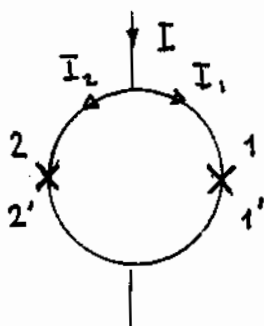
En svag länk, antingen det är ett tunt oxidskikt, en smal brygga, ett normalt metallager mellan två supraledare eller liknande, släpper genom elektronpar. Den är således i sig själv en supraledare och bör i princip ha samma egenskaper som en sådan. Dock är partätheten lägre, varför parametrarna blir annorlunda. Den kritiska strömtätheten är således ofta 10-1000 A/cm², vilket kan jämföras med 10⁵-10⁶ A/cm² för en massiv supraledare. (Det bör dock påpekas att i extrema fall har man tillverkat Nb-tunnelövergångar med $I_c \approx 10^5$ A/cm²). De magnetiska egenskaperna liknar de för en typ II supraledare. Meissner-effekten är utbildad vid låga fält, penetrationsdjupet är dock stort, av storleksordningen 1 mm. B_{c1} är ca 10⁻⁴ T(1G). Plasmaoscillationer uppträder med betydligt lägre frekvenser än de i en vanlig metall, typiskt är de något tiotal till hundratal GHz i de tunnelövergångar man använder idag.

XII.15. Josephsonströmmar och magnetiska fält

En stor del av det intresse, som visas Josephsoneffekten, betingas av beroendet av magnetiska fält. T ex är de digitala tillämpningarna och de känsliga magnetometrarna (SQUID) beroende på denna inverkan. Här studerar vi först kvantinterferens mellan två punktformiga övergångar och integrerar sedan över en svag länks tvärsnittsarea för att få fram strömfält-beroendet hos en övergång med ändlig utsträckning.

XII.16. Kvantinterferens mellan två punktformiga övergångar

Betrakta två parallellkopplade Josephsonövergångar.



Totala strömmen

$$I = I_{01} \sin\phi_1 + I_{02} \sin\phi_2$$

XII.16.1

där $I_{01,2}$ är de kritiska strömmarna i övergång 1 resp 2 samt ϕ_1 och ϕ_2 är motsvarande fasskillnader. För enkelhet skull antar vi att $I_{01} = I_{02} = I_0$. Uppenbarligen beror I på $\phi_1 - \phi_2$. När $\phi_1 - \phi_2 = n \cdot 2\pi$ adderas de två delströmmarna medan de utsläcker varandra för $\phi_1 - \phi_2 = (n + \frac{1}{2}) \cdot 2\pi$. Vi kan vidare relatera fasskillnaden, och totala strömmen, till det magnetiska flöde, som finns i den slutna supraledande krets definierad av övergångarna 1 och 2 med tilliedningar. Resonemanget är likadant som det då vi visade att flödet i en supraledande ring är kvantiserat. Här måste vi dock ta hänsyn till att fält penetrerar övergångarna och ger fasändringar $\phi_{1,2}$.

Från en entydigt bestämd vågfunktion

$$\oint_C \nabla \phi = n \cdot 2\pi = \oint_C \frac{1}{\hbar} \left(\frac{m^* j_s}{e^* \rho_s} + e^* A \right) \cdot dl \quad \text{XII.16.2}$$

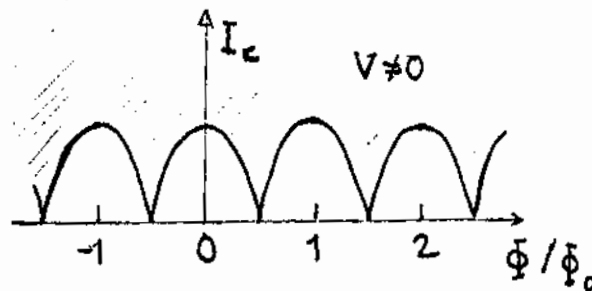
Väljer vi integrationsvägen djupt nog inuti de supraledande ledningarna fås $j_s = 0$.
Bidraget från själva övergångarna separerar vi ut, varför

$$\begin{aligned} n \cdot 2\pi &= \Delta\phi_1 + \frac{e^*}{\hbar} \int_1^2 A \cdot dl - \Delta\phi_2 + \frac{e^*}{\hbar} \int_2^1 A \cdot dl = (\Delta\phi_1 - \frac{e^*}{\hbar} \int_1^2 A \cdot dl) - (\Delta\phi_2 - \frac{e^*}{\hbar} \int_2^1 A \cdot dl) + \frac{e^*}{\hbar} \oint_C A \cdot dl \\ &= \phi_1 - \phi_2 + 2\pi\Phi/\Phi_0 \end{aligned} \quad \text{XII.16.3}$$

$$\text{Sålledes } I = I_0 \cdot 2 \sin \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = 2 I_0 \sin\phi \cos\pi(n - \Phi/\Phi_0) \quad \text{XII.16.4}$$

Dvs den maximala ström, som kan dras genom parallellkretsen vid det applicerade flödet blir

$$I_c = 2 I_0 |\cos\pi\Phi/\Phi_0| \quad \text{XII.16.5}$$



Uttrycket liknar det man får för interferensmönstret vid diffraktion genom en dubbelspalt i optiken. Fasskillnaden bestäms i vårt fall av det flöde, som är inneslutet i ringen. Den kritiska strömmen är periodisk i detta flöde med perioden $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15}$ Vs. Kretsen kallas för en SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) och vi skall senare behandla dess användning för mätändamål.

Vi har hittills betraktat övergången som punktformig. Vid ändlig storlek fås en modulation av den kritiska strömmen pga flödet i själva övergången samt pga självinducerade fält. Vi skall nu visa att gradienten av fasskillnaden över Josephsonelementet är proportionell mot magnetiska flödestätheten i övergången.

XII.17. Kvantinterferens inom en enda övergång

Betrakta en tunnelövergång med ström i x-riktningen. Totala strömmen genom övergången

$$I = \int dy dz j_0 \sin \phi(y, z) \quad \text{XII.17.1}$$

då vi har ett magnetiskt fält applicerat parallellt med övergången (i y-z-planet). För flödeskomponenten i y-riktningen har vi enl ekv XII.16.3

$$n \cdot 2\pi = \phi(z_1) - \phi(z_2) + 2\pi \Phi_y / \Phi_0$$

$$\text{eller } \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{2ed'}{\hbar} B_y \quad \text{XII.17.2}$$

där $d' = d + \lambda_1 + \lambda_2$, dvs summan av oxidtjockleken och penetrationsdjupen i de supraledande tunnelelektrodena. På samma sätt fås för z-komponenten:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{2ed'}{\hbar} B_z \quad \text{XII.17.3}$$

$$\text{eller } \nabla \phi = \frac{2ed'}{\hbar} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \quad \text{XII.17.4}$$

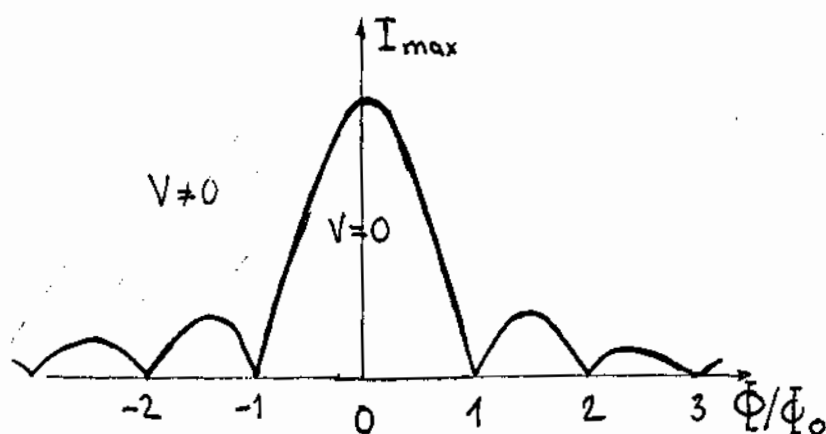
Antag nu, för enkelhets skull, att fältet ligger helt i y-riktningen och att övergången är liten, så att fältet är uniformt i övergången. Då får vi:

$$j_x = j_0 \sin \left(\frac{2ed'}{\hbar} B_y z + \phi_0 \right) \quad \text{XII.17.5}$$

och totala strömmen genom att integrera över ytan:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-l/2}^{l/2} dz j_0 \sin \left(\frac{2ed'}{\hbar} B_y z + \phi_0 \right) = \\ &= j_0 b l \frac{\hbar}{2ed' B_y l} \left\{ -\cos \left(\frac{2ed'}{\hbar} B_y \frac{l}{2} + \phi_0 \right) + \cos \left(-\frac{2ed'}{\hbar} B_y \frac{l}{2} + \phi_0 \right) \right\} \\ &= I_0 \left| \frac{\sin(\pi \Phi_y / \Phi_0)}{\pi \Phi_y / \Phi_0} \right| \sin \phi_0 \end{aligned} \quad \text{XII.17.6}$$

där ϕ_0 justerar sig så att $I_x =$ den pålagda strömmen och I_0 är maximala Josephsonströmmen, dvs max strömtäthet multiplicerad med arean lb .



Lägg märke till likheten med ljusdiffraktion i enkelspält. För vissa magnetiska fältstyrkor blir maximala Josephsonströmmen noll. Det inträffar var gång övergången innehåller en multipel av ett helt flödeskvantum, $d \cdot B_y = n \Phi_0$. Då cirkulerar strömmen i övergången så att totala strömmen blir noll.

Låter man strömmen från två ändligt stora övergångar interferera fås produkten

$$I = 2I_0 \left| \frac{\sin \pi \Phi_C / \Phi_0}{\pi \Phi_C / \Phi_0} \cos \pi \Phi_T / \Phi_0 \right| \sin \phi_0$$

där Φ_C är flödet i övergången och Φ_T totala flödet i den supraledande kretsen som innehåller de två övergångarna.

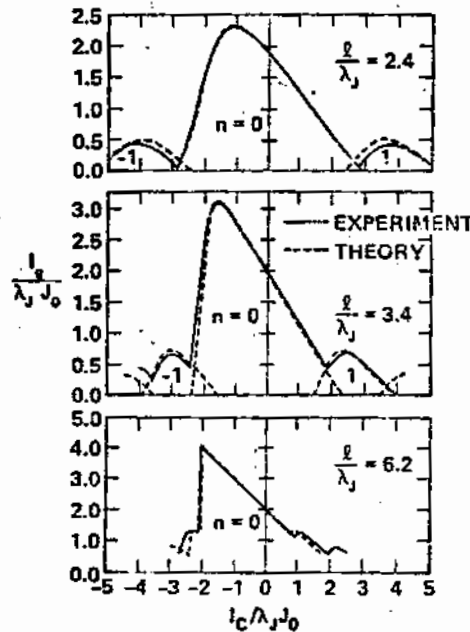
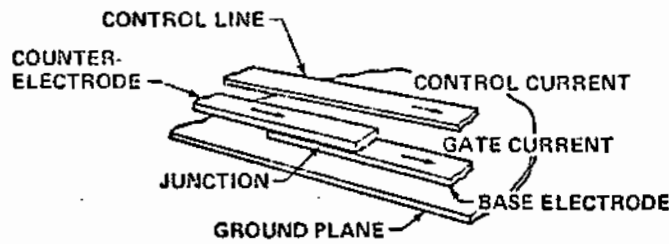
XII.18. Stora tunnelövergångar

Behandlingen har hittills gällt så pass små övergångar, att magnetiska fältet i övergången kunde betraktas som konstant. Vidare har vi försummat det självinducerade fält, som uppkommer från de strömmar vilka flyter i övergången och elektroderna. För stora övergångar, där Josephsons penetrationsdjup $\lambda_J <$ övergångens dimensioner, måste man ta hänsyn till att det magnetiska fältet avtar från randen. (Vi återkommer senare till en härledning av λ_J och diskuterar strömfördelningar i ett exempel.) Josephsonströmmens beroende av det applicerade magnetiska flödet modifieras något, vilket illustreras i figur. Beteenden ges för tre olika längder hos övergången (som i detta fall är av "in line" typ).

Lägg märke till att den kritiska strömmen ej går ned till noll i minima. Detta beror på att i långa övergångar kan det existera mer än en fördelning av kvantiserade flöden (fluxoner) för vissa fältstyrkor. Det blir ett överlapp i ström mot flöde för ett resp två flödeskvanta, två och tre, etc. Då fältet ökar hoppar flödesfördelningen (och den lokala strömfördelningen) till tillståndet med närmast större antal flöden innan totala strömmen når nollnivån.

Josephsonströmmen flyter normalt inom penetrationsdjupet från övergångens kanter. Således kan man ej öka totala strömmen obegränsat genom att öka en övergångs storlek.

Vi återkommer till det dynamiska förloppet hos flödeskvanta senare, då vi behandlat Josephsonströmmar vid elektriska fält i övergången. Man får solitonliknande lösningar i övergången.



XII.19. Växelströmseffekten

De grundläggande Josephsonekvationerna ger ett samband mellan ström genom och spänning över ett punktformigt Josephsonelement.

$$I = I_0 \sin \left\{ \int \frac{2e}{\hbar} V(t) dt \right\}$$

Vi skall nu studera fallet $V \neq 0$ och applicerar först en likspänning V_0 och sedan en tidsberoende spänning. Tills vidare antar vi att spänningen över Josephsonövergången är lika med den tillförda spänningen (voltage bias).

XII.19.a. Likspänning

Då $V = V_0$ fås $I = I_0 \sin((2e/\hbar)V_0 t + \phi_0)$, dvs en växelström med frekvensen ca 500 MHz per applicerad μV ($2e/h \approx 483.593589 \pm 0.000024$ MHz/ μV NBS, 1971). I princip har vi en signalgenerator, en spänningsstyrd strömgenerator, som låter sig lätt svepas över ett svårtillgängligt frekvensintervall. Dock stöter vi på praktiska svårigheter: (i) den utvecklade högfrekvenseffekten är mätlig och en ringa del av den kopplas vanligen till yttervärlden; (ii) det fordras en stabil spänningskälla för att frekvensfluktuationerna ej skall bli alltför stora; (iii) även med en stabil yttre spänningskälla ger termiskt inducerade fluktuationer en breddning av oscillatorns frekvens. Denna breddning är bl a beroende av den effektiva temperatur, som Josephsonövergången ser samt kvadraten av den senares dynamiska resistans för likspänningen i fråga.

XII.19.b. Applicerade mikrovågor

$$V = V_0 + V_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \text{ ger}$$

$$\phi = (2e/\hbar)V_0 t + (2eV_1/\hbar\omega_1)\sin(\omega_1 t + \theta_1) + \varphi_0$$

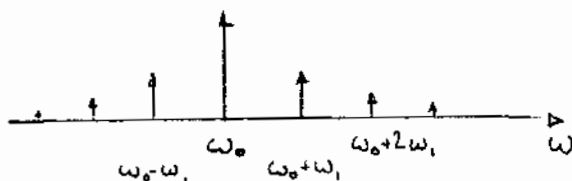
$$I = I_0 \sin\{\omega_0 t + \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + \varphi_0\} =$$

$$= I_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(\alpha_1) \sin\{(\omega_0 + p\omega_1)t + \varphi_0 + p\theta_1\} \quad \text{XII.19.1}$$

där $\omega_0 = 2eV_0/\hbar$, $\alpha_1 = \omega_0 V_1 / \omega_1 V_0 = 2eV_1/\hbar\omega_1$ och J_p är p-te ordningens Besselfunktion.

Från uttrycket för strömmen märker vi

- (i) att vi får en frekvensmodulerad ström med frekvenskomponenter icke endast vid den pålagda frekvensen, utan generellt vid $(\omega_0 + p\omega_1)/2\pi$. Om man ej får begränsningar av de yttre kretsarna, kommer en mycket stor del av strålningseffekten att gå ut på en mångfald av övertoner. Amplituden bestäms av $J_p(\alpha_1)$.



- (ii) att för vissa likspänningar, $V_0 = -p\hbar\omega_1/2e$, fås likströmsbidrag:

$$|I^{dc}| = I_0 J_p(\alpha_1) \sin(p_0 - p\theta_1)$$

Strömspikarna är åtskilda av $\Delta V_0 = \hbar\omega_1/2e$. I realiteten är det svårt att hålla spänningen över ett Josephsonelement lika med den externt pålagda spänningen (en konstant spänningskälla). Vanligare är en konstant strömkälla. Då fås strömsteg vid de aktuella spänningarna i stället för strömspikar. Detta framgår av figuren. Stegen är väl definierade. Vi får ett samband mellan spänning och frekvens. Dvs om vi använder ett fastlagt värde för $\hbar/2e$, kan vi mäta spänning i frekvensenhet. Många länder har gått över från Westonceller till Josephsonövergångar som spänningsnormal. För en närmare beskrivning se t ex R.A. Kamper "Superconducting Devices for Metrology and Standards" i "Superconductor Applications: SQUIDs and Machines" (B.B. Schwartz and S. Foner, eds.) Plenum, N.Y. 1977, s. 189

- (iii) att strömkomponenterna beror på Besselfunktionernas argument, dvs på effekten hos de pålagda mikrovågorna. T ex avtar Josephsonströmmen vid noll likspänning med applicerad högfrekvenseffekt.

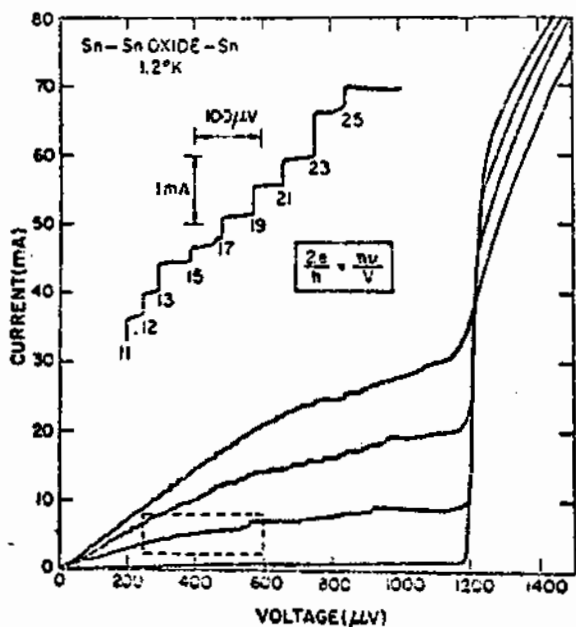


Fig. 3. Microwave-induced tunnel steps in the current-voltage characteristic of a thin-film tunnel junction. The curve observed in the absence of microwave power is the lowest one at voltages below the gap voltage (1200 μ V) and the highest one above the gap voltage. The DC Josephson current has been suppressed by applying a small magnetic field. With increasing microwave power the general current level increases below the gap voltage and decreases above the gap voltage.

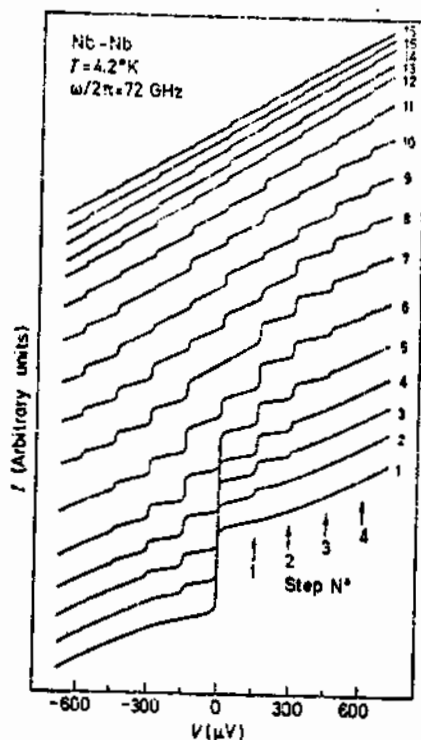


Fig. 10.6 I-V characteristics of a Nb-Nb point-contact junction taken by a high impedance source. 1: no microwave power, 2-16: microwave power increasing gradually by 25 db. Frequency: 72 GHz, $h\omega/q = 149 \mu$ V. First four steps at multiples of 149μ V are clearly discernible. After Grimes and Shapiro [327].

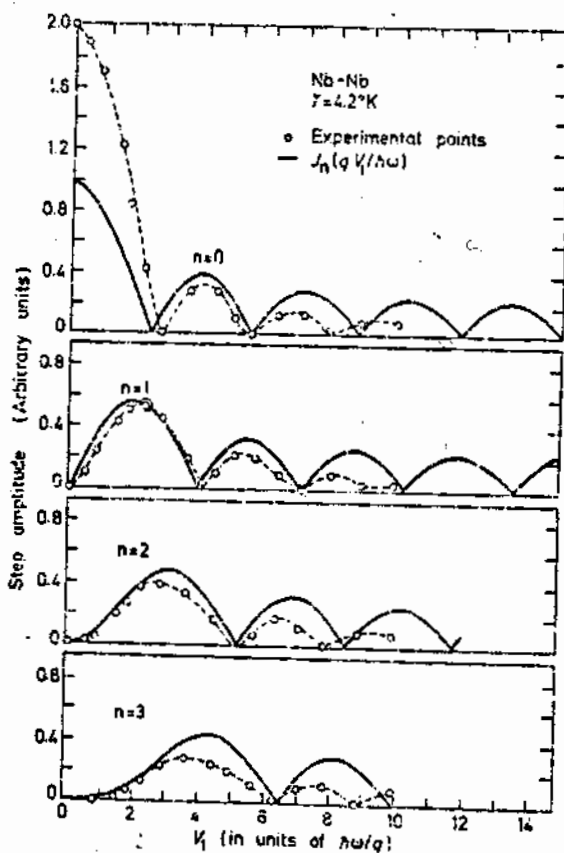
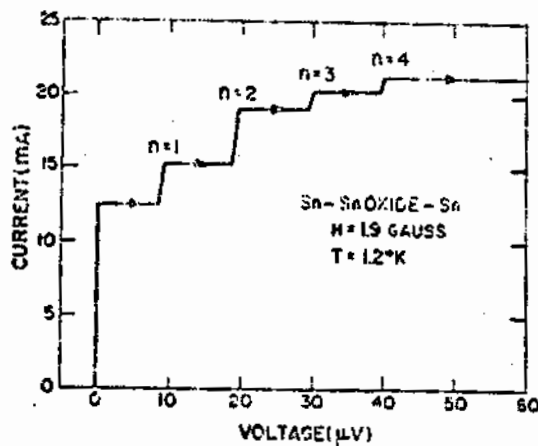


Fig. 10.7 Data from Fig. 10.6 plotted to display how the current in several constant-voltage steps varies as the applied rf voltage \sim (microwave power)^{1/2} is varied. The data points from the n^{th} step are compared with the amplitude of the n^{th} order Bessel function. The data were fitted to the theoretical curves at the two points denoted by double circles. The rf voltage across the junction is expressed in units of $h\omega/q$. After Grimes and Shapiro [327].

XII.19.c. Självinducerade steg

En förspänning V_0 ger upphov till en växelström. Denna, i sin tur, ger upphov till ett växelfält, som kan påverka Josephsonströmmen. Inverkan blir märkbart stark, då frekvensen överensstämmer med en resonansfrekvens för övergången. En serie självinducerade strömsteg (pga en konstant ström-generator) resulterar, vilket framgår av figuren. De kallas ofta Fiske-steg.



XII.20. Vågekvation för fasdifferensen

Vi har redan argumenterat att Josephsonströmmen

$$j = j_0 \sin \phi$$

påverkas av elektriska och magnetiska fält genom

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}$$

$$\nabla \phi = \frac{2ed}{\hbar} (\hat{n} \times \vec{B})$$

Vidare gäller Maxwells relation

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Kombinera dessa relationer, välj strömmen i x-riktningen, fältet i y-z-planet och vi får:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = j_x / I_b$$

XII.20.1

där $v = (C\mu d')^{-\frac{1}{2}}$

$$I_b = \hbar/2ed'\mu = \phi_0/2\pi d'\mu$$

och C är övergångens kapacitans.
Med uttrycket för j_x insatt fås vågekv:

$$(\nabla_{y,z}^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})\phi = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin\phi \quad \text{XII.20.2}$$

Där $\lambda_J = (\hbar/2ed'\mu j_0)^{\frac{1}{2}}$

Vad betyder vågekvationen? Låt oss studera ett par fall.

XII.20.a. Meissnereffekt för den svaga länken

Betrakta först det statiska läget och antag att ϕ är liten, dvs $\sin\phi \approx \phi$

$$\nabla_{y,z}^2 \phi = \phi/\lambda_J^2 \quad \text{XII.20.3}$$

Detta är Londons ekvation i två dimensioner. Vid små pålagda fält, där lineariseringen gäller, begränsas strömmar och magnetiska fält till ett område nära barriärens rand. Eftersom inträngningsdjupet λ_J är stort, ca 0.1-1 mm vid vanliga kritiska strömtätheter, j_0 , är det endast i stora övergångar, som man behöver ta hänsyn till en variation av fältet. Ju starkare koppling mellan supraledarna, ju större j_0 och mindre λ_J .

Vid stora fält gäller ej längre att $\sin\phi \approx \phi$. Liksom i en typ II supraledare tränger flöde in i barriären i form av kvantiserade flöden då $B > B_{c1}$, vilken typiskt är av storleksordningen 10^{-4} T (1 G).

XII.20.b. Plasmaoscillationer

Låt oss nu bortse från variationen i rummet hos ϕ och enbart betrakta tidsberoende störningar.

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi + \omega_J^2 \sin\phi = 0 \quad \text{XII.20.4}$$

där $\omega_J = v/\lambda_J = (2ej_0/\hbar C)^{\frac{1}{2}}$

Störningen i ϕ kan ses som en plasmaresonans. Frekvensen är typiskt 10-100 GHz, vilket är avsevärt lägre än i en metall beroende på den lägre laddningsbärartätheten i övergången. Lägg märke till att plasmafrequensen kan minskas genom att minska strömtätheten.

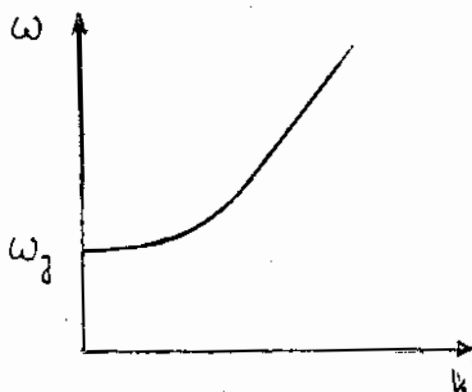
XII.20.c. Propagation av störning i ϕ

Vi betraktar en generell störning av ϕ , som förutsättes vara så pass liten att $\sin\phi \approx \phi$. Den propagerar längs barriären med en konstant hastighet. Sätt $\phi \sim \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$. Insättning i vågekv ger

$$(\omega/\omega_j)^2 = \lambda_j^2 k^2 + 1$$

XII.20.5

Plasmafrekvensen $\omega_j/2\pi$ är således den lägsta frekvens vid vilken små störningar kan propagera längs barriären. För ω mindre än ω_j blir k imaginär, dvs störningen dör ut. (Speciellt fås Meissnereffekten, $k = -i/\lambda$ då $\omega = 0$.)



XII.21. Bindningsenergi i svag länk

Kopplingsenergin, eller bindningsenergin, mellan två supraledare pga tunneling av elektronpar är

$$E_{12} = \text{konst} - \frac{\hbar I_0}{2e} \cos\phi = \text{konst} - E_0 \cos\phi$$

Vi skall inte härleda detta uttryck, utan ge ett motiverande resonemang. (Utgår vi från den fasberoende strömmen, skulle vi kunna omotiverat skriva

$$dF = I \cdot V dt = I_0 \sin\phi \cdot (\hbar/2e)(d\phi/dt)dt,$$

varför $F = \text{konst} - \frac{\hbar I_0}{2e} \cos\phi$.)

Vi har tidigare argumenterat, att för supraflytande helium och supraledare kan vi betrakta antalet kondenserade partiklar och faser i vågfunktionen, vilken beskriver partiklarna, som konjugerade variabler, liksom impulsen och läget är konjugerade operatorer.

Vi har således för $N/2$ elektronpar

$$|\psi'_N\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{iN\phi/2} |\psi'_\phi\rangle \quad \text{och invers} \quad \text{t}$$

$$|\psi'_\phi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} e^{iN\phi/2} |\psi_N\rangle$$

och osäkerhetsrelationen $\Delta N \Delta \phi \geq 1$

På samma sätt i en svag länk där n elektronpar tunnlar med fasdifferensen ϕ fås vågfunktionen för dessa $\psi_\phi = \sum_n e^{in\phi}$. Tunnlingen av elektroner kan beskrivas med ett tunnelbidrag till Hamiltonoperatören för systemet av två kopplade supraledare. Kopplingsenergin orsakad av tunnlande elektronpar kan räknas ut med 2:a ordningens störningsräkning. P.S.S som i "tight-binding" approximationen för att beräkna elektronband, får man en energi för systemet = konst - $E_0 \cos \phi$, där den sista delen utgör bindningsenergin.

Vi kan testa plausibiliteten genom att ta fram ett uttryck för tunnelströmmen. Den operator, som mäter antalet tunnlande par kan skrivas

$$n_{op} = (1/i) \partial / \partial \phi \quad , \quad \text{vars förändring med tiden}$$

$$\hbar n_{op} = (i/\hbar) [H, n_{op}] \quad , \quad \text{varför strömoperatören pga tunnlande elektronpar}$$

$$I_{op} = 2en_{op} = \frac{2e}{\hbar} \left[H, \frac{\partial}{\partial \phi} \right].$$

Förväntansvärdet av parströmmen i tillståndet ψ_ϕ

$$I = \langle \psi_\phi | I_{op} | \psi_\phi \rangle = - \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ \text{konst} - E_0 \cos \phi \} = I_0 \sin \phi$$

Omvänt skulle vi kunna argumentera, att om vi har en parström $I_0 \sin \phi$, så får vi en bindningsenergi - $E_0 \cos \phi = -(\hbar/2e) I_0 \cos \phi$.

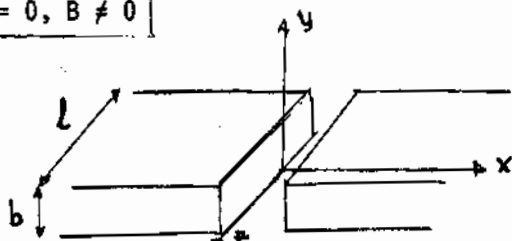
Lägg märke till beroendet av fasskillnaden. Då vi drar en ström genom Josephsonövergången fås en ändlig fasdifferens ($I = I_0 \sin \phi$). Då I närmar sig I_0 går ϕ mot $\pi/2$ och bindningsenergin går mot noll. Fluktuationer av typ plasmavängningar kan lätt exiteras.

Vi kan också uttrycka bindningsenergin i form av temperatur $T_0 = (\hbar/2e) I_0 / k$. Med insatta värden på konstanterna fås $T_0 / I_0 \approx 2.4 \cdot 10^7$ K/A. För att kopplingen skall vara stark nog att tillåta faskohärens trots termiskt brus i övergången vid heliumtemperatur fordras att $I_0 \geq 0.1 \mu\text{A}$. Om termiskt brus från högre temperatur eller andra källor plockas upp (vilket kan ge ett par storleksordningar högre effektiv källtemperatur) fordras motsvarande större Josephsonström för att bevara faskohärensen.

XII.22. Några exempel.

I detta avsnitt repeterar vi det föregående genom att behandla ett par exempel. Vi skall studera de strömfördelningar, som uppstår i övergången då denna utsätts för ett magnetiskt fält. Dels ser vi på fallet då övergången är elektriskt isolerad från omgivningen, dels då $I \neq 0$ och $V \neq 0$.

A. $V = 0, I = 0, B \neq 0$

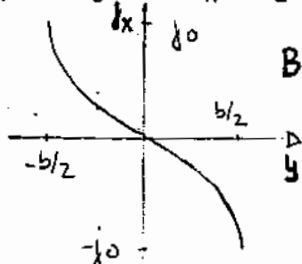


$\vec{B} = B_z \hat{z}$, dvs $\vec{A} = B_z x \hat{y}$

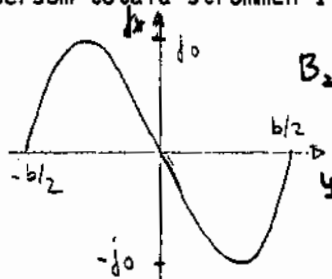
Först betraktar vi fallet att $\lambda_j > b$ så att fältet inne i övergången kan anses vara lika med det externa fältet.

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{2ed'}{\hbar} B_z$

$j_x = - j_0 \sin \left(\frac{2ed'}{\hbar} B_z y + \phi_0 \right)$ där $\phi_0 = 0$, eftersom totala strömmen $I = 0$.

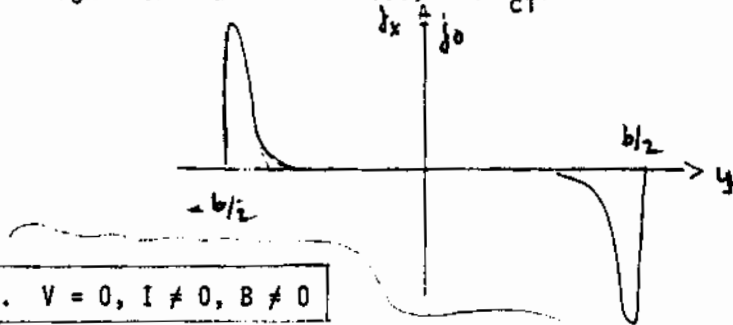


$B_z = \Phi_0 / 2bd'$



$B_z = \Phi_0 / bd'$

Notera att ström cirkulerar i övergången trots att totala strömmen är noll. I stora övergångar, dvs om $\lambda_j \ll b$, flyter strömmar endast inom ett litet område från kanten, om det magnetiska fältet är litet, $H < H_{c1}$.



B. $V = 0, I \neq 0, B \neq 0$

Vi får samma lösning som ovan för $b < \lambda_j$:

$j_x = - j_0 \sin \left(\frac{2ed'}{\hbar} B_z y + \phi_0 \right)$, där $\phi_0 \neq 0$.

Integrering över barriärytan ger p.s.s. som i avsnitt XII.17 att

$$I = I_0 \cdot \left| \frac{\sin(\pi\phi_z/\phi_0)}{\pi\phi_z/\phi_0} \right| \sin\phi_0,$$

där $I_0 = j_0 \lambda b$, $\phi_z = B_z d'b$ och ϕ_0 justerar sig att passa pålagd ström. Strömfördelningen vid olika fält, samt totala maximala strömmens fältberoende ges i figurer

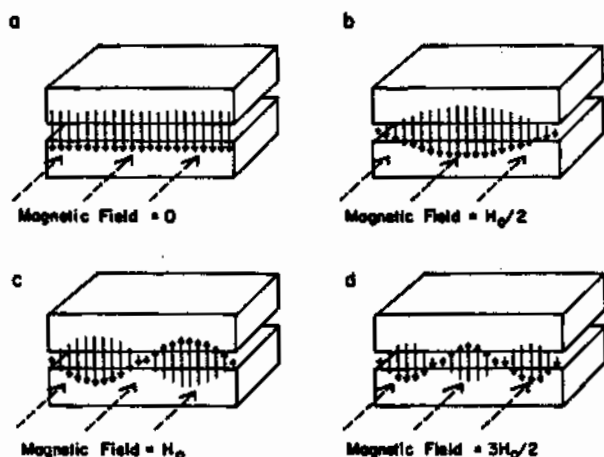


Fig. 8. Effect of a magnetic field on a direct current passing through a Josephson junction. The external magnetic field (dashed arrows) is applied in the plane of the junction at right angles to one side of the junction. In (a) the magnetic field is zero and the magnitude of the current, as represented by the length of the solid arrows, is the same at all points of the junction. In (b) the applied magnetic field ($H_0/2$) is just strong enough to cause the wavelength of the Josephson current to equal twice the length of the length of the junction. In (c) the magnetic field has been increased to H_0 , so that a full wavelength fits into the junction. The current now reverses direction once; equal currents flow in both directions and the total junction current is zero. In (d) the field has been increased to $3H_0/2$; three half-wavelengths fit into the junction, the current reverses direction twice, and again there is a net current across the junction. The total current is not as large as it was in (a) or (b). Figure 9 shows how the junction critical current depends on the strength of the magnetic field. From Langenberg *et al.* (4).

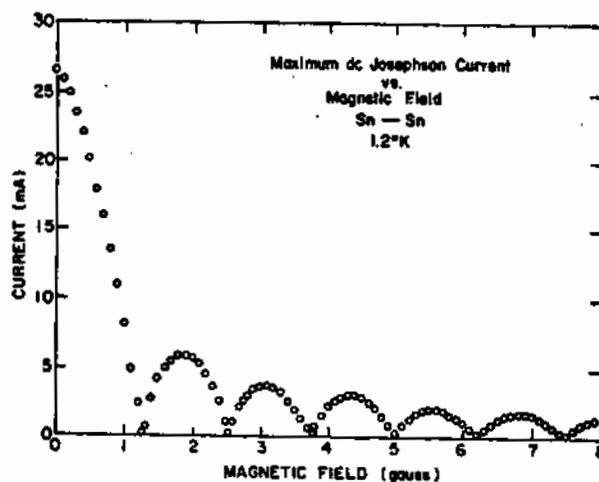
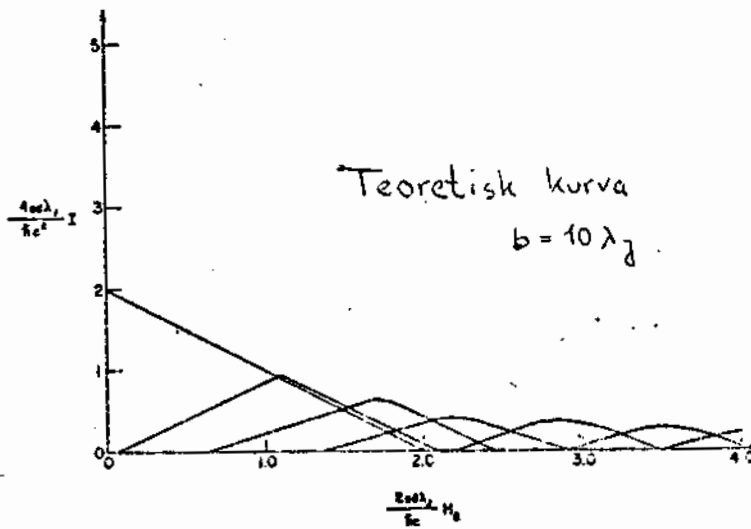


Fig. 9. Magnetic field dependence of the maximum DC Josephson current of a junction. The data is for a Sn-Sn oxide-Sn junction at 1.2°K, with the magnetic field oriented along the y axis (see Fig. 5). For this sample L was 0.25 mm and the period of the Fraunhofer pattern is 1.25 G. From Langenberg *et al.* (4).

Lägg märke till likheten med diffraktionen av ljus i spalt (jämför också fallet två interfererande övergångar med brytning av ljus i dubbelspalt). För vissa magnetiska fältstyrkor blir maximala Josephsonströmmen noll. Detta händer var gång övergången innehåller ett helt antal flödeskvanta, $d'bB_z = n\Phi_0$. (Då blir bindingsenergin, dvs korrelationsenergin mellan de två supraleddarna, noll och fäsluktuationer har stor inverkan.)

I stora övergångar, $\lambda_j \ll b$, måste man ta hänsyn till det magnetiska fält, som Josephsonströmmen ger upphov till. Då får man ej längre en Fraunhoferliknande diffraktion. För $b = 10\lambda_j$ fås ett beroende som visas i nedanstående figur (Owen och Scalapino, Phys. Rev. 164, 538 (1969)):



C. $V \neq 0, B \neq 0.$

Vi har redan sett hur fasskillnaden varierar över tunnelövergången, då ett magnetiskt fält appliceras. Med samma geometri som föregående, dvs fältet i z-riktningen och strömmen i x-riktningen fås

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -k_y = -\frac{2ed'}{\hbar} B_z$$

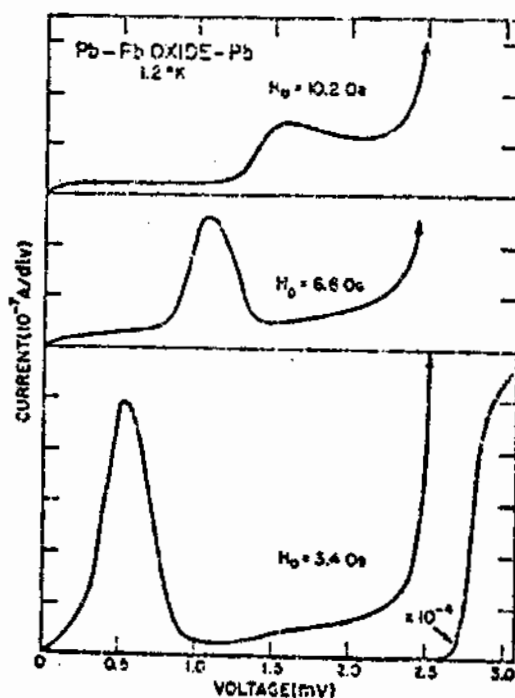
Om vi dessutom applicerar en likspänning V_0 fås:

$$\phi = \omega_0 t - k_y y + \phi_0, \text{ där } \omega_0 = 2eV_0/\hbar.$$

Strömtätheten $j_x = j_0 \sin(\omega_0 t - k_y y + \phi_0)$ är en våg med fashastigheten ω_0/k_y . När denna fashastighet är lika stor som fashastigheten för den elektromagnetiska våg, som kan utbreda sig längs övergången (jämför avsnitten XII.10 och XII.20), väntar vi oss att energi transformeras från Josephsonströmmen till den elektromagnetiska svängningsmoden, som i sin tur förlorar energi genom förluster i barriären och genom utstrålning i rymden eller på anslutande transmissionsledningar. Eftersom energin dras från den externa spänningskällan fås strömökning då

$$\omega_0/k_y = V_0/d'B_z = v_{\text{fas}} = (C\mu_0 d')^{-1/2} = \bar{c} \sqrt{d/d'}$$

Detta förhållande avspeglas i nedanstående figur tagen från Eck et al, Phys. Rev. Lett. 13, 15 (1963).



XII.23. Olika bidrag till strömmen i en supraledande tunnelövergång.

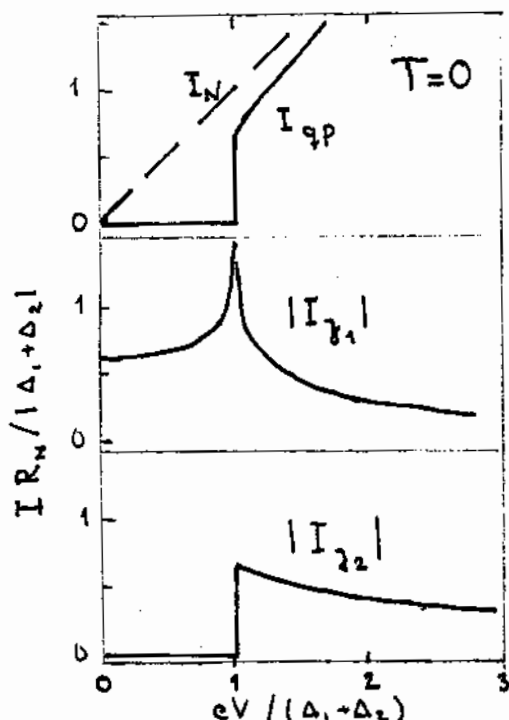
Hittills i detta kapitel har vi koncentrerat oss på det strömbidrag som de tunnlande parerna ger. Emellertid penetreras den svaga länken också av enskilda elektroner, dvs kvasipartiklar. För en tunnelövergång har vi redan studerat spänningsberoendet hos denna ström. Vid spänningar väl under gapspänningen är strömbidraget litet vid låg temperatur, dvs den dynamiska resistansen är mycket hög. Nära gapspänningen ökar strömmen snabbt och närmar sig den normala tunnelströmmen vid höga förspänningar.

Förutom parströmmen finns ytterligare ett fasberoende strömbidrag. Detta beror på interferens mellan tunnlande par och kvasipartiklar. Detta bidrag är beroende dels på kvasipartikelströmmens storlek och dels på parströmmen genom cosinus av fasdifferensen. Frekvensberoendet hos interferensströmmen är Kramers-Kronig-relaterat till parströmmens frekvensberoende. Interferensströmmen är i allmänhet liten och kan försummas. Det är först ovan gapfrekvensen, som dess bidrag blir dominerande.

Frekvens-, eller spänningsberoendet, hos de tre strömkomponenterna vi diskuterat

$$I(V,T) = I_{J_1}(V,T)\sin\phi + I_{J_2}(V,T)\cos\phi + I_{q.p}(V,T)$$

ges i nedanstående figur.



Spänningsberoendet hos tre strömbidrag i en Josephson-övergång mellan två supraledare vid $T = 0$.

Maximat i $|I_{J1}|$ vid energigapet brukar benämnas Riedel-singulariteten.

Slutligen har vi också ett kapacitivt bidrag till tunnelströmmen. De två tunnelektrodena är åtskilda av ett tunt isolerande skikt. Det är således ej förvånande att en tunnelövergång har en icke försumbar kapacitans.

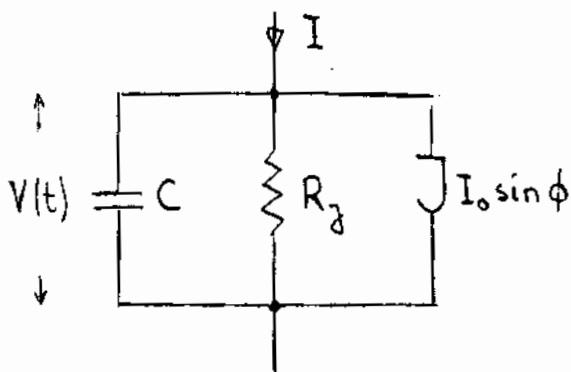
Totalt får vi (med vanliga beteckningar):

$$I(V, T) = I_0(V, T) \sin \phi(V) + (1 + \zeta(V, T) \cos \phi(V)) V/R_J(V, T) + C dV/dt \quad \text{XII.23.1}$$

Amplituden, ζ , för $\cos \phi$ -bidraget är omdiskuterat, då teori och experiment ej tycks överensstämma.

XII.24. RSJ-modellen; Konstant spänning resp. ström

Försummar vi par-kvasipartikel-interferens-strömmen ($\cos \phi$ -termen) får vi kvar tre strömkomponenter. Vi kan införa en kretsmodell av en verklig Josephsonövergång



$$I = I_0 \sin \phi + \frac{V}{R_J} + C \frac{dV}{dt}$$

$$I = I_0 \sin \phi + \frac{\Phi_0}{2\pi R_J} \dot{\phi} + \frac{C \Phi_0}{2\pi} \ddot{\phi}$$

I en tunnelövergång är R_J (vid låg frekvens) starkt spänningsberoende, den är relativt stor vid låga spänningar, liten vid gapspänningen och ungefärligt lika normalresistansen därovanför. I en mikrobrygga eller en punktkontakt är R_J liten och i det närmaste spänningsoberoende. Många gånger shuntar man en tunnelövergång med en liten resistans. Den resulterande resistansen blir då liten och i det närmaste spänningsberoende.

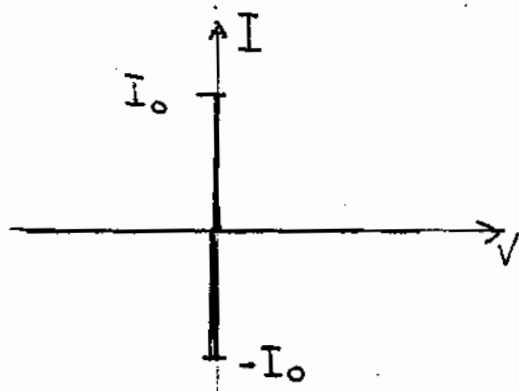
Hittills har vi betraktat Josephsonövergången som om spänningen över den vore densamma som den pålagda spänningen, dvs med en konstant spänningskälla. Är detta riktigt? Ofta är övergångarna lågohmiga (speciellt gäller detta icke-tunnelövergångar). Vid höga frekvenser är fria rymdens karakteristiska impedans 377Ω , vilket oftast är avsevärt större än övergångens resistans. Då kan man inte längre anta att spänningen är konstant (= den applicerade) vid övergången. Snarare är det så att det är den applicerade strömmen, som är konstant oberoende av övergångens tillstånd. Växelströmmar, som är ett resultat av spänningen över Josephsonelement, ger en tidsberoende spänning över det shuntade motståndet (R_J). Denna tidsberoende spänning återkopplas till Josephsonövergången. De resulterande strömmarna och spänningarna blir distorderade, starkt övertonsrika.

XII.25. Ström-spännings-karakteristikor

Här skall vi ge några exempel på I-V-kurva för ideala Josephsonelement, S-I-S, resistivt och kapacitivt shuntade övergångar.

XII.25.a. Enbart parström, konstant spänningskälla

I detta fall fås ett likströmsbidrag, $I = I_0 \sin \phi$, för $V = 0$. För $V \neq 0$ blir $\langle I \rangle = 0$.



XII.25.b. Resistivt shuntad övergång, strömkälla

Vi försummar kapacitansen hos en resistivt shuntad (med konstant resistans R) övergång och får:

$$I = I_0 \sin \phi + \frac{\phi_0}{2\pi R} \frac{d\phi}{dt}$$

$$\omega_R dt = \frac{d\phi}{I/I_0 - \sin \phi}$$

där $\omega_R = 2\pi R I_0 / \Phi_0 = 2e I_0 R / \hbar$ är en karakteristisk frekvens.

Integration ger

$$I = I_0 \sin \phi \quad \text{för } I < I_0$$

$$\omega_R t = \frac{2}{\sqrt{(I/I_0)^2 - 1}} \tan^{-1} \left\{ \frac{(I/I_0) \tan(\phi/2) + 1}{\sqrt{(I/I_0)^2 - 1}} \right\} \quad \text{för } I > I_0$$

eller

$$\tan(\phi/2) = \sqrt{1 - (I_0/I)^2} \tan \{ (\omega_R t / 2) \sqrt{(I/I_0)^2 - 1} \} - I_0/I$$

Resultatet är ej direkt genomskinligt. Dock kan vi få fram att för $I \gg I_0$ blir lösningen

$$\phi \approx (I/I_0) \omega_R t = 2e I R t / \hbar$$

dvs samma resultat som med en konstant spänningskälla.

Vidare blir Josephsonperioden

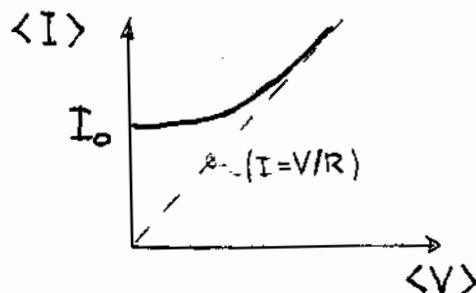
$$T = 2\pi / \omega_R \sqrt{(I/I_0)^2 - 1}$$

mycket lång då $I \gtrsim I_0$ men minskar snabbt då I ökar.

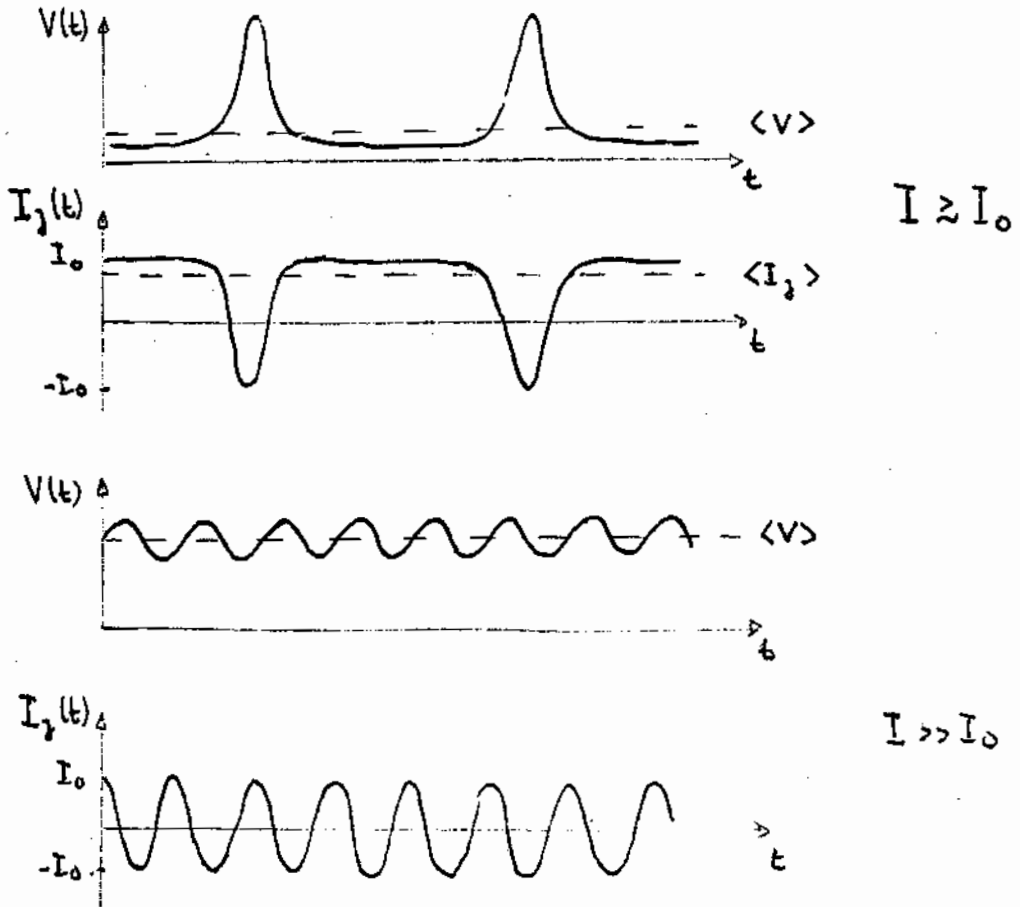
Likspänningen över elementet

$$\langle V \rangle = (\hbar/2e) \langle d\phi/dt \rangle = \hbar/2eT = IR \sqrt{1 - (I_0/I)^2}$$

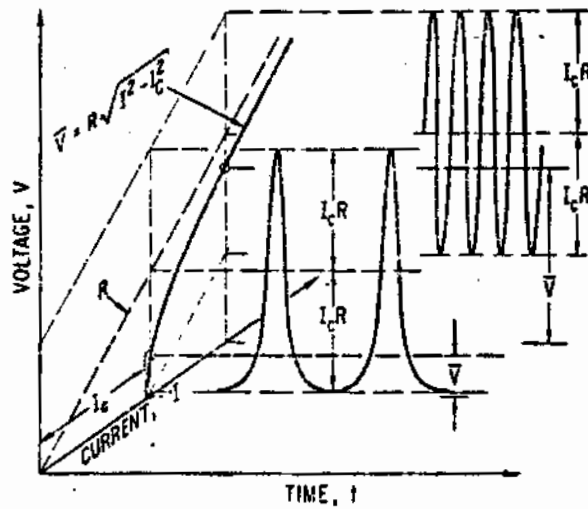
DC-karakteristiken för den shuntade övergången blir således:



Analyserar vi ekvationerna mera i detalj kan vi få ut tidsberoendet hos spänningen $V(t)$ över övergången samt parströmmen $I_j(t)$ genom själva Josephson-elementet, vilket visas schematiskt i figur för två fall: $I \gtrsim I_0$ samt $I \gg I_0$.



Tidsberoendet hos ström och spänning över Josephsonkanalen i en resistivt shuntad Josephsonövergång. För totala strömmen tillkommer ström genom motståndet.



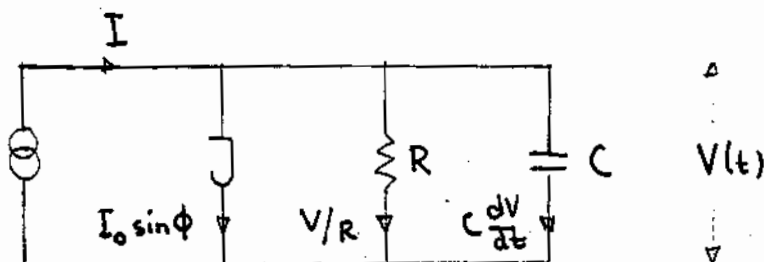
Oscillationerna blir i det närmaste sinusformade (som med konstant spänning) vid stora dc-spänningar. Vid små spänningar, där $I > I_0$ fås icke-sinusformade svängningar, dvs många övertoner.

Under varje svängningsperiod är tidsintegralen av den momentana spänningen konstant oberoende av perioden:

$$\int_0^T V(t) dt = \int_0^T (\hbar/2e) (d\phi/dt) dt = \int_0^{2\pi} (\hbar/2e) d\phi = \Phi_0$$

XII.25.c. Inverkan av shuntkapacitans

Nu tar vi hänsyn till den kapacitans som ofta shuntar en Josephsonövergång (t ex den som finns inherent i en tunnelövergång). Som i förra exemplet antar vi också att övergången har en parallellresistans R och är ansluten till en konstant strömkälla.



$$I = I_0 \sin \phi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

eller i normerade enheter:

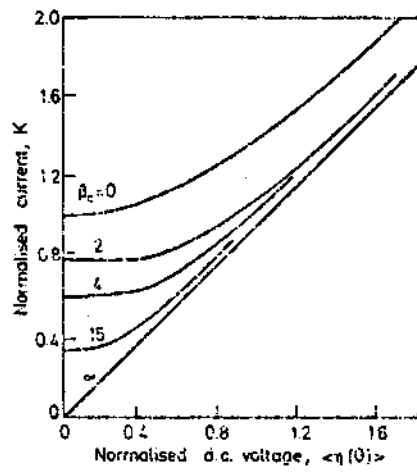
$$i = \sin \phi + \frac{d\phi}{d\theta} + \beta_C \frac{d^2 \phi}{d\theta^2}$$

där $i = I/I_0$; $\theta = \omega_R t$; $\omega_R = 2eI_0 R/\hbar$; $\beta_C = RC\omega_R$

Lösningen till ekv ovan är komplicerad för godtyckliga värden på β_C . Vi nöjer oss med att ge resulterande I-V-karakteristik (D.E. McCumber, J. Appl. Phys. 39, 3113 (1968); W.C. Stewart, Appl. Phys. Lett. 12, 277 (1968)) för olika β_C -värden.

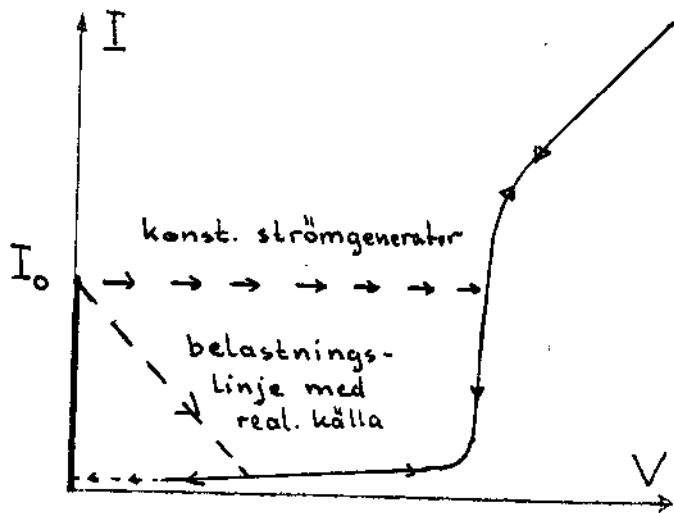
$\beta_C = 0$ ger samma I-V-kurva som i föregående ex. I motsatt gräns, $\beta_C = \infty$, kortsluter kapacitansen alla växelströmmar och Josephson-elementet drar ingen effekt från den yttre källan.

En liknande familj kurvor fås då vi betraktar en resistivt shuntad Josephsonövergång matad från en konstant spänningskälla och tar hänsyn till induktansen i tillledningarna.



XII.25.d. Tunnelövergång

Vi har i föregående exempel betraktat en konstant parallelresistans. I en tunnelövergång är kvasipartikel resistansen starkt spänningsberoende. I-V-karakteristiken för en S-I-S tunnelövergång blir

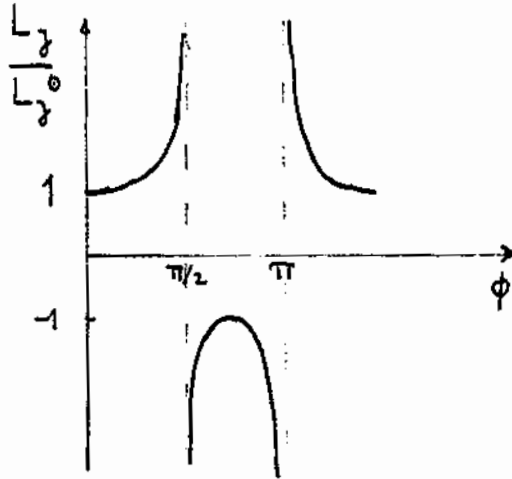


XII.26. Josephsoninduktans

Vi kan betrakta ett Josephson-element som en parametrisk induktans.

$$dI/dt = I_0 \cos\phi (d\phi/dt) = (2eI_0/\hbar) \cos\phi \cdot V = V/L_J$$

$$L_J = \hbar/2eI_0 \cos\phi = L_J^0 / \cos\phi$$



Om övergången är ansluten till en konstant strömkälla, fås $L_J = L_J^0 / \sqrt{1 - (I/I_0)^2}$

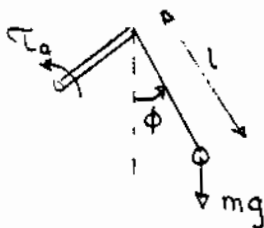
Har övergången en kapacitans, C, fås en resonant svängningsmod vid

$$\omega_J^2 = 1/L_J C = (2eI_0/\hbar C) \sqrt{1 - (I/I_0)^2}$$

För tunnelövergångar är denna plasmaresonans typiskt av storleksordningen 10-100 GHz, medan den är mycket högre (och ofta utan större betydelse) för punktkontakter och mikrobryggor.

XII.27. Mekaniska modeller

Beräkningar grundade på de icke-linjära Josephsonrelationerna blir ofta besvärliga. Även om man lyckas ge en analytisk lösning, är den fysikaliska tydningen ofta ej genomskinlig. Analoga modeller kan ibland underlätta en förståelse. Tidsberoendet i en Josephsonövergång liknar det hos en driven pendel med korresponderande storheter givna i tabell:



$$\tau_a = mgl \sin\phi + D\dot{\phi} + M\ddot{\phi}$$

$$V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$$

Josephson	Common Symbol	Mechanical
Critical Current	I_c	Pendulum Moment: Arm
Phase Difference	ϕ	Phase Angle Pendulum
Voltage $\times 2\pi/\Phi_0$	$d\phi/dt$	Angular Velocity
Applied Current	I	Applied Torque
$\Phi_0/(2\pi R)$	D	Damping Coefficient
$C\Phi_0/(2\pi R)$	M	Moment of Inertia
$\Phi_0/(2\pi L)$	K	Torsion-Bar Spring Constant
Current in Inductor	I_L	Torque in Torsion Bar
Josephson Coupling Energy, $-(\Phi_0 I_c / 2\pi) \cos \phi$		Gravitational Potential Energy, $-I_c \cos \phi$
Electrostatic energy, $\frac{1}{2} CV^2$		Kinetic Energy, $\frac{1}{2} M (d\phi/dt)^2$
Magnetic Energy, $\frac{1}{2} L I_L^2$		Torsional Energy, $\frac{1}{2} I_L^2 / K$
Power Input from Applied Current, IV		Power Input from Applied Torque, $I d\phi/dt$

Den högst icke-sinusformade vågformen för $I > I_0$ ($\tau_a > \tau_c$) korresponderar mot pendeln, som långsamt roterar kring toppläget men snabbt kring botten av dess rotationscykel. Vid höga vridmoment kan man försumma gravitationskraften. Den viskösa kraften balanserar det applicerade vridande momentet och en periodisk (sinusformad) rörelse blir resultatet. Hysteres från kapacitans är en konsekvens av den icke försumbara rörelseimpulsen - när pendeln väl går runt dess toppläge fortsätter den göra så pga sin rörelseimpuls.

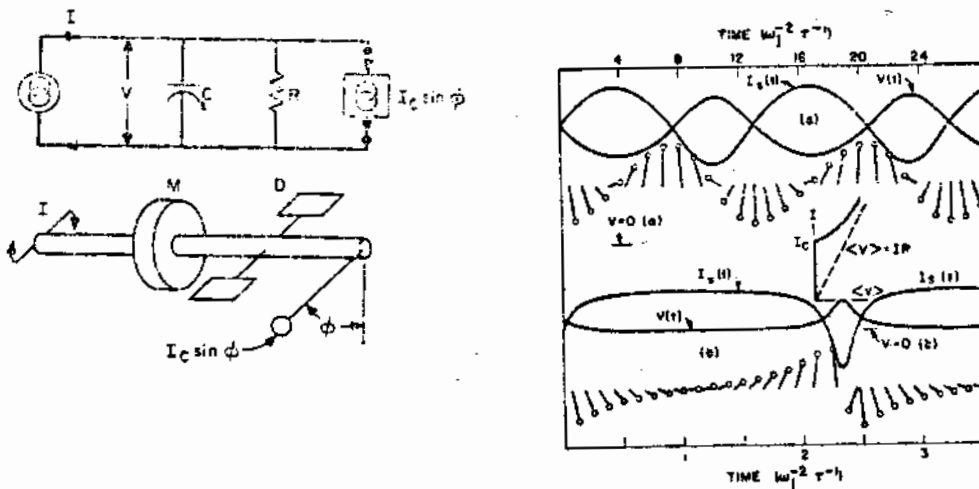
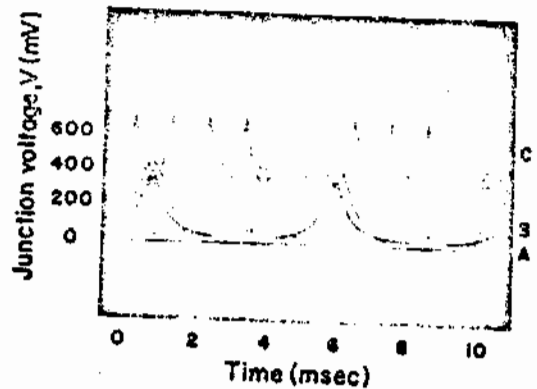
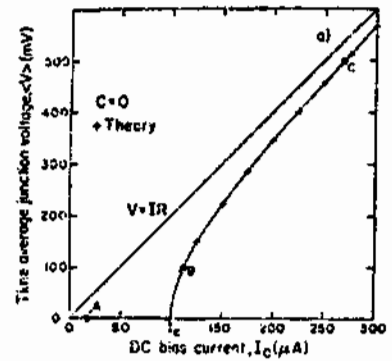
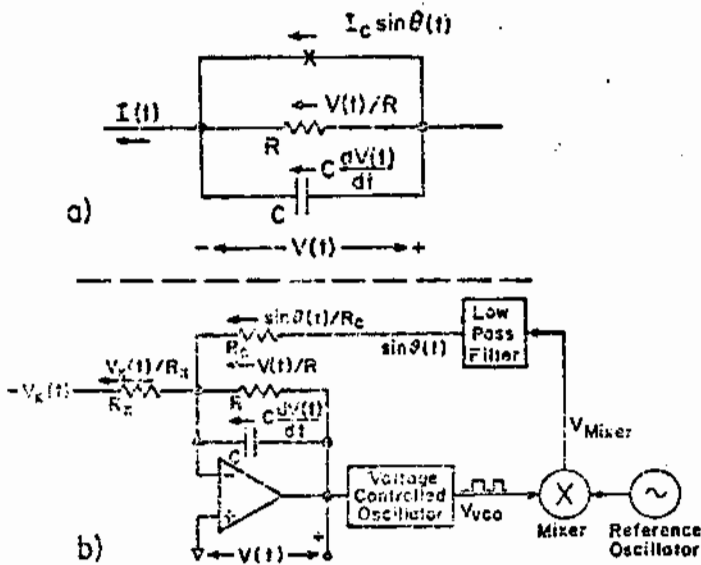


Fig. 3 $I_s(t) = I_c \sin \phi(t)$ and $V(t)$ for an overdamped junction. Also shown is a representation of a pendulum performing analogous motion as described in the text. (a): $I = 1.05 I_c$; (b): $I = 4.0 I_c$. The $I-\langle V \rangle$ curve is shown in the inset.

XII.28. Elektroniska analoger

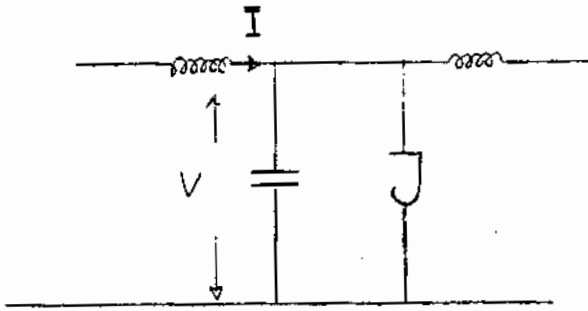
Genom att använda återkopplade förstärkare, spänningskontrollerade frekvensgeneratorer, filter, etc kan man konstruera elektriska analoger till Josephsonövergångens uppförande. En stor fördel är att förloppen relativt enkelt kan visualiseras i och med att de sker mycket långsammare i analogerna än i övergången, typiskt en faktor 10^9 långsammare. Principschemat för en sådan modell ges nedan. Exempel på en erhållen $\langle I \rangle - \langle V \rangle$ -kurva och spänningens tidsförlopp i olika bias-punkter ges också. Komplicerade strukturer av övergångar kan studeras medelst stora analogmaskiner.



XII.29. Solitoner i långa Josephsonövergångar

I en lång Josephsonövergång kan man få soliton-liknande svängningar i fasdifferensen ϕ . En soliton är ett matematiskt begrepp för en odämpad våg. I tunnelövergången motsvaras den av ett kvantiserat flöde, fluxon. Såväl solitoner som anti-solitoner kan genereras. Eftersom en fluxon är mycket stabil och kan styras, manipuleras, lagras och fås att växelverka med andra elektronenheter, så skulle den kunna användas som en byggsten i informationsystem. Det pågår en utveckling på området; den är dock ej på långt när så långt kommen som vad gäller den vanliga Josephsonbaserade datorn. Ett annat användningsområde är som generator eller detektor av högfrekvent elektromagnetisk strålning. Här skall vi endast ställa upp ekvationer och antyda några lösningar i figurform - en fullständig behandling skulle bli alltför arbetsam.

Betrakta först en förlustfri lång Josephsonövergång eller en transmissionsledning bestående av två supraledande filmer på ömse sidor av ett tunt oxidlager.



Induktans och kapacitans per längdenhet ges av $L = \mu_0 d' / W$; $C = \epsilon_r \epsilon_0 W / d$, där W är transmissionsledningens (strip-lines) bredd, d isolatorns tjocklek och $d' = d + \lambda_1 + \lambda_2$. Per längdenhet:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t} - I_0 \sin \phi$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} V$$

ger $\frac{\hbar}{2eL} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\hbar C}{2e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = I_0 \sin \phi$

Normalisera avstånd till $\lambda_J = (\hbar / 2eLI_0)^{1/2}$ och tid till $\omega_J^{-1} = (\hbar C / 2eI_0)^{1/2}$ och ekvationen ovan blir

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = \sin \phi$$

Detta är en sk sinus-Gordonekvation, vars lösningar ger sk solitoner. Eftersom transversella spänningen och longitudinella strömmen ges av tids- och rumsderivatorerna av ϕ , bestäms övergångens elektriska egenskaper av solitonerna. Innan vi fördjupar oss i dessa bör vi komplettera ekvationen med fler termer. Vi vet, att vi har förlustertermer: kvasipartikelströmmen V/R_J ; interferensströmmen $(\zeta V/R_J) \cos \phi$; ytresistans hos de supraledande filmerna, vilken vi kan approximera med en resistans R_s per längdenhet parallell med induktansen L . För att kompensera dessa tillför vi en ström per längdenhet I_b . Totalt fås

$$\eta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x'^2 \partial t'} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - \Gamma(1 + \zeta \cos \phi) \left| \frac{\partial \phi}{\partial t'} \right| \frac{\partial \phi}{\partial t'} = \sin \phi - i$$

där $\eta = (2eL^2I_0/\hbar R^2C)^{1/2}$

$\Gamma = \hbar/2eR_jC$

$i = I_b/I_0$

Ekvationen har "enkla" lösningar i form av plasma- och fluxon-vågor men också mera komplicerade möder av soliton-soliton kollision, soliton-anti-soliton kollision samt "breather", vilket är ett oscillerande bundet tillstånd av en soliton och en anti-soliton.

Ett antal olika tillstånd illustreras i följande figurer, som också illustrerar skillnaden mellan soliton och anti-soliton. Lägg märke till hur solitoner reflekteras mot övergångens randyta samt hur solitoner, resp soliton och anti-soliton kolliderar.

Dissipationen hos de oscillerande fluxonerna innebär, att man ser strömsteg i den långa tunnelövergångens I-V-kurva. Detta visas i figur, där antalet oscillerande flödeskvanta är utmärkt för de olika stegen. Den detaljerade utformningen av strömstegen beror på övergångens geometri. En dominerade del av den dissipierade effekten vilken är relativt stor bör ske i form av elektromagnetisk strålning, varför solitongeneratorn ser lovande ut.

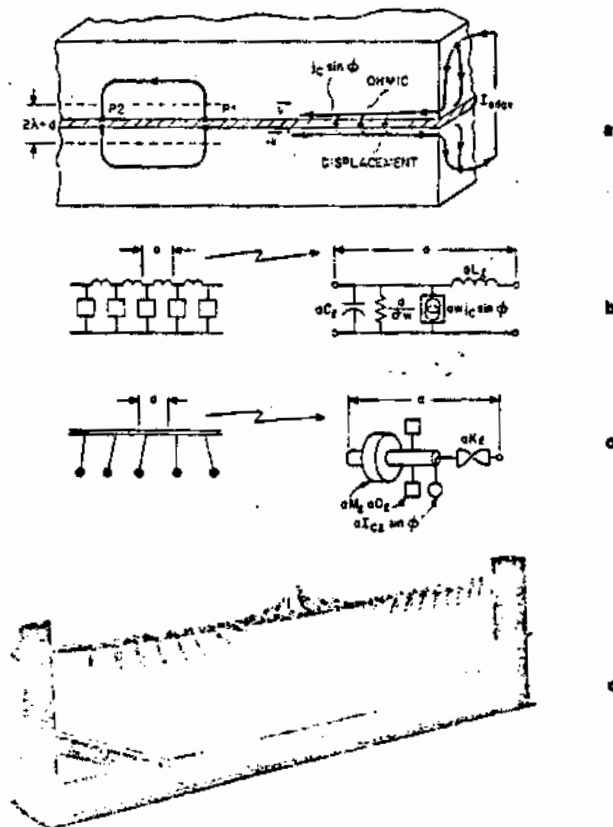
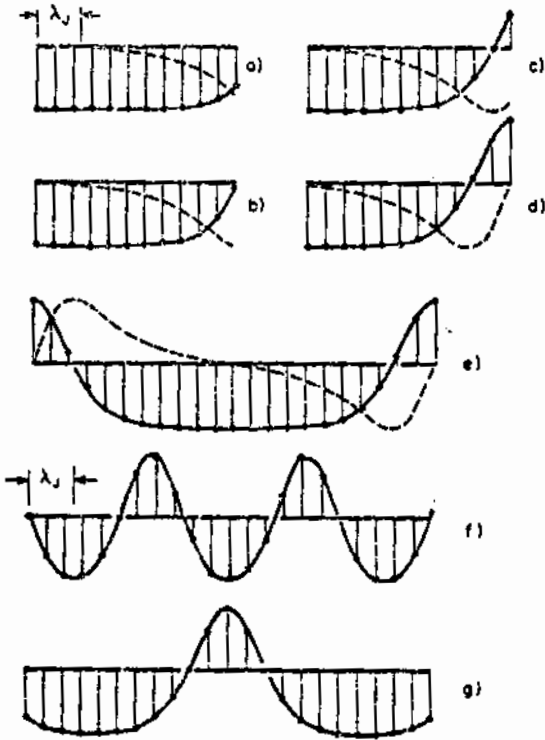
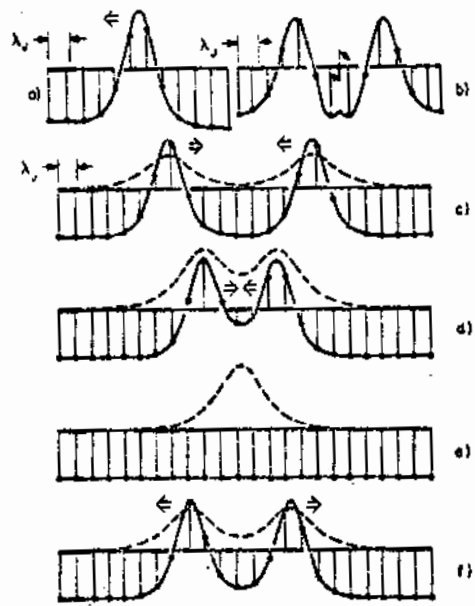


Fig. 19 (a): Cross-section of a tunnel junction. The barrier is shown cross-hatched. On the left is the contour C involved in determining the dependence of ϕ on B. On the right, the surface current density k flowing on the electrodes is schematically shown as being fed by external current sources I_{edge} and drained by the three current densities through the barrier.
 (b): The equivalent circuit of a one-dimensional junction.
 (c): The pendulum-torsion bar analog of the circuit in (b).
 (d): Photograph of analog of long junction.

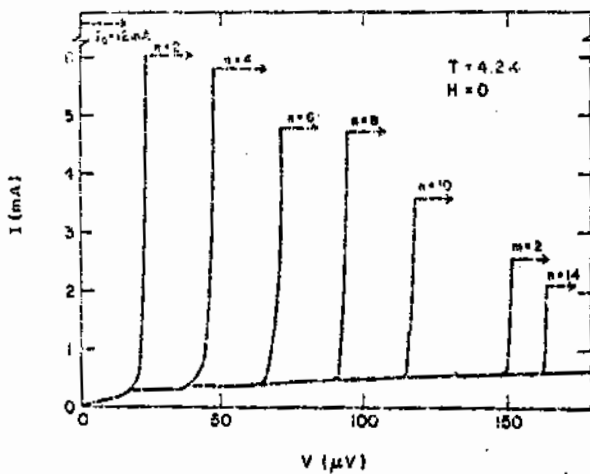


Front view ($-\cos \phi(x)$) of a long array subject to applied torque at the right; end of (a): $I = 0.425 I_{C1}$, (b): $I = 0.648 I_{C1}$, (c): $I = 0.887 I_{C1}$, and (d): $I = I_{C1}$. The dashed line is a top view ($-\sin \phi(x)$). (e): Similar views of an array subjected to equal and opposite torques $I = \pm I_{C1}$ at the two ends corresponding to a magnetic field B_{C1} . (f): Front view of array of (c) with $B = 1.05 B_{C1}$ in a multivortex configuration. (g): Array of (e) with $B = 0.5 B_{C1}$ with a single trapped vortex.



Front view ($-\cos \phi(x)$) of arrays containing vortices responding to various forces. (a): The gradient in $I_{C2}(x)$ causes an effective force pushing the vortex to the left. (b): A vortex and antivortex being pushed in opposite directions by a local applied torque. (c) to (f): Collision of a moving vortex and antivortex in an underdamped array at four successive moments. The dashed line is $V(x)$.

Mekaniska analogier från T.A. Fulton, "Equivalent Circuits and Analogs of the Josephson Effect" i Superc. Appl.: SQUIDS & Machines (Schwartz & Foner eds.) Plenum 76, kap. 4.



Zero field steps in a Pb-Pb-oxide Pb junction (after Chen and Langenberg, 1974).

XII.30. Tillämpningar av supraledande tunneleffekter.

Supraledande tunneleffekter och speciellt Josephson-effekterna, kan tillämpas på många olika sätt. Utvecklingen av användbara system har dock bara börjat. Endast i några fall har man hittills fått fram instrument som konkurrerat ut andra typer av instrument. (Ett av problemen har faktiskt varit att man haft svårt att finna användningsområden för instrument som varit flera tiopotenser känsligare än vad man varit van vid; olika störningar blir dessutom ofta dominerande. Erfarenhetsmässigt vet man att tillämpningar kommer väl de känsliga instrumenten finns.) Här ges endast en sammanställning - en mera detaljerad beskrivning av tillämpningsområden ges i följande avsnitt och i särskilda uppsatser.

EXEMPEL PÅ TILLÄMPNINGAR AV TUNNELEFFEKTER

A. SQUID (Superconducting Quantum Interference Device; supraled. kvantinterferometer) främst för magnetiska mätningar.

Finns i två huvudtyper:

- a. dc-SQUID
- b. rf-SQUID

B. Digitala tillämpningar (snabba omslag, låg effekt).

Dataelement:

- a. Logiska element
- b. Snabbt minne (Cache)
- c. Huvudminne
- d. Lokal kraftförsörjning

Analoga/digitala kretsar:

- e. Analog sampling av snabba förlopp
- f. A/D-omvandlare

C. Högfrekvenstillämpningar.

Standardmätningar:

- a. Voltstandard
- b. Brustertermometer

Högfrekvensoscillatorer:

- c. Kopplade oscillatorer
- d. Solitonbaserad generator

Detektorer baserade på Josephson- eller kvasipartikel-tunneling:

- e. Videodetektorer
- f. Blandare
- g. Parametriska förstärkare
 - (i) externt pumpade
 - (ii) internt pumpade

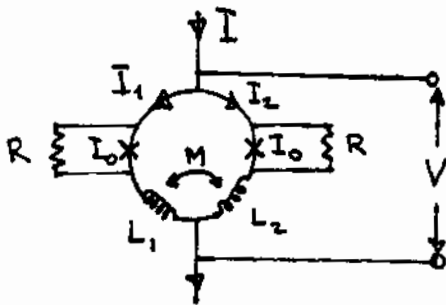
XII.31. SQUID, Kvantinterferometer.

Två olika slags supraledande kvantinterferometrar har utvecklats: dc-SQUID och rf-SQUID. Den förra består av två interfererande Josephsonövergångar som förspänts med en ström större än den kritiska. rf-SQUID-en består av en svag Josephsonlänk inorporerad i en supraledande ring och bygger på kvantisering av flöde i kretsen. Formellt är det felaktigt att kalla den senare för en interferometer, men detta är det traditionella namnet. I dc-SQUID-en genereras internt en hög frekvens, vilket hjälper ge den goda prestanda. Den är således ej helt likströmsbaserad men benämnes dc-SQUID.

XII.31.a. dc-SQUID.

I avsnitt XII.16 har vi visat att maximala strömmen utan spänningsfall genom två parallellkopplade Josephsonövergångar är periodiskt beroende av det magnetiska flödet inuti den krets som innehåller övergångarna. Den förenklade behandlingen gäller emellertid endast då slingans effektiva induktans L är liten. Då $LI_0 \phi_0 \ll 1$ är flödet från självinduktansen avsevärt mindre än ett flödeskvantum och den tidigare behandlingen gäller. Om däremot LI_0 blir jämförbar med ϕ_0 kommer en icke försumbar ström att cirkulera i kretsen och det totala flödet i kretsen ϕ_T skiljer sig från det pålagda flödet ϕ_e ($\phi_T = \phi_e + L_J I_{\text{circ}}$).

Använder vi oss av tunnelövergångar i kretsen så uppträder gärna hysteres i ström-spänningskurvan. För att undvika denna shuntar vi övergångarna med motstånd R (avsevärt mindre än tunnelresistanserna) så att $\beta_c = 2eI_0 R^2 C/h < 1$. Den pålagda strömmen väljs i allmänhet större än den kritiska ($2I_0$ för symmetrisk SQUID) så att en liten spänning ligger över kretsen. Sambanden mellan strömmen, spänningar och flöden blir:



$$I = I_1 + I_2 = I_0 \sin\phi_1 + V_1/R + I_0 \sin\phi_2 + V_2/R \quad \text{XII.31.1}$$

$$V = V_1 + L_1 dI_1/dt + M dI_2/dt = V_2 + L_2 dI_2/dt + M dI_1/dt \quad \text{XII.31.2}$$

$$d\phi_1/dt = (2e/\hbar) V_1 \quad \text{XII.31.3}$$

$$d\phi_2/dt = (2e/\hbar) V_2 \quad \text{XII.31.4}$$

$$\phi_1 - \phi_2 = 2\pi \phi_T / \phi_0 \quad \text{XII.31.5}$$

där totala flödet är summan av det externa flödet ϕ_e och de flöden som induceras av strömmar I_1 och I_2 :

$$\phi_T = \phi_e + \phi_1 + \phi_2 = \phi_e - (L_1 - M)I_1 + (L_2 - M)I_2 = \phi_e + LJ \quad \text{XII.31.6}$$

där

$$J = (I_2 - I_1)/2 \text{ och vi har tagit det symmetriska fallet}$$

$$L/2 = L_1 - M = L_2 - M$$

Ekvationerna ovan ger:

$$J = (\phi_T - \phi_e)/L = (\phi_1 - \phi_2) \cdot \frac{\phi_0}{2\pi L} - \frac{\phi_e}{L} \quad \text{då } \frac{d}{dt} I = \frac{d}{dt} (I_1 + I_2) = 0 \text{ f\u00f6r } \quad \text{XII.31.7}$$

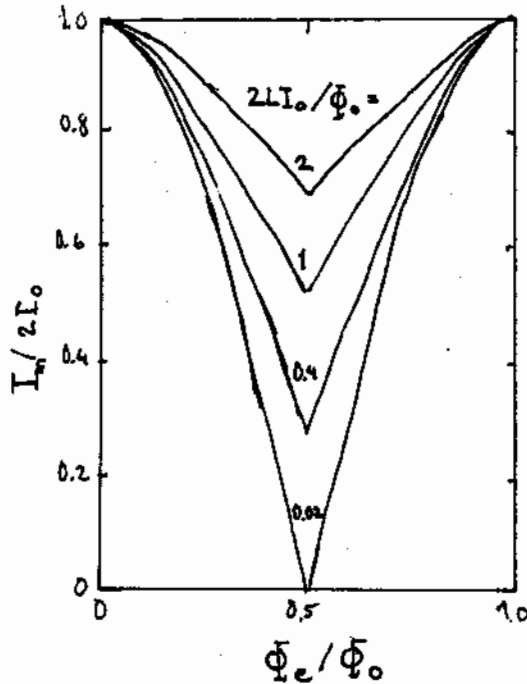
$$V = V_1 - (L/2) dJ/dt = V_2 + (L/2) dJ/dt = (\hbar/4e) (d\phi_1/dt + d\phi_2/dt) \quad \text{XII.31.8}$$

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \frac{2eR}{\hbar} \underbrace{[I/2 - J - I_0 \sin\phi_1]}_{I_1} \quad \text{XII.31.9}$$

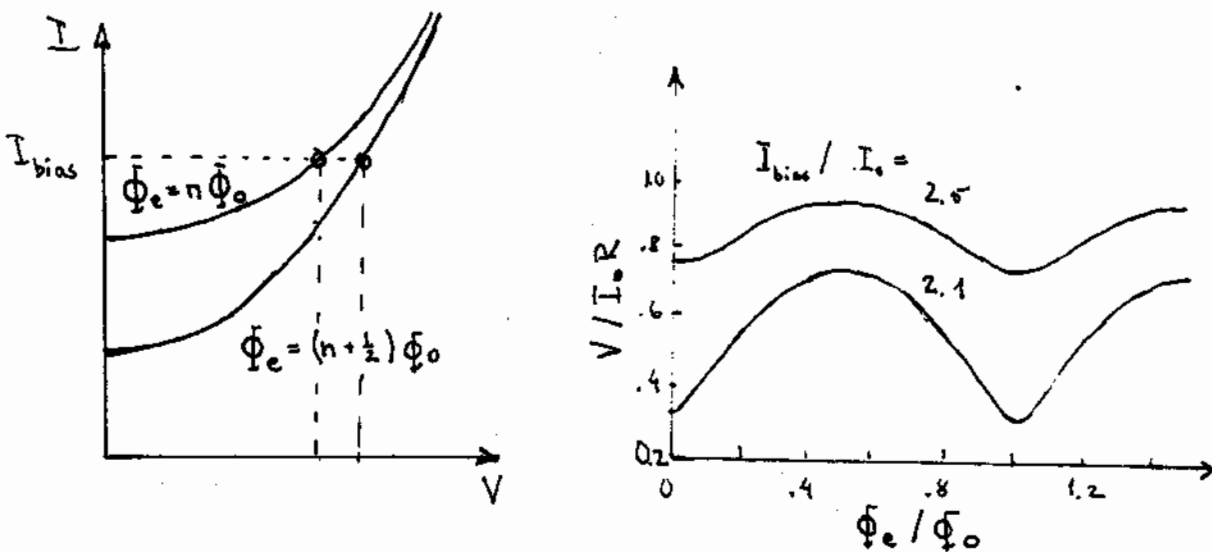
$$\frac{d\phi_2}{dt} = \frac{2eR}{\hbar} [I/2 + J - I_0 \sin\phi_2]$$

XII.31.10

Ekvationen kan lösas numeriskt och ger då SQUID-ens egenskaper. Här nedan ges den maximala strömmen (normerad till $2I_0$) som funktion av det externa flödet (normerat till Φ_0). Kurvan är jämn nära $\phi = n\Phi_0$ och spetsig för $\phi = (n + \frac{1}{2})\Phi_0$. Flera kurvor ges för olika värden på parametern $2LI_0/\Phi_0$. Ett vanligt värde för denna är $2LI_0/\Phi_0 = 1$. Detta värde ger en variation av den maximala strömmen, ΔI_{\max} , av ca $\Phi_0/2L$ då flödet varieras ett kvantum.



Eftersom I-V-kurvan för dc-SQUID-en beror på det applicerade flödet, vilket skisseras i nedanstående figur, fås en periodisk variation av spänningen över kretsen med flöde, om totala strömmen är konstant.



SQUID-ens känslighet beskrivs av $(\partial V / \partial \Phi_e)_I$. Vi kan uppskatta denna, då $2LI_o / \Phi_o \approx 1$:

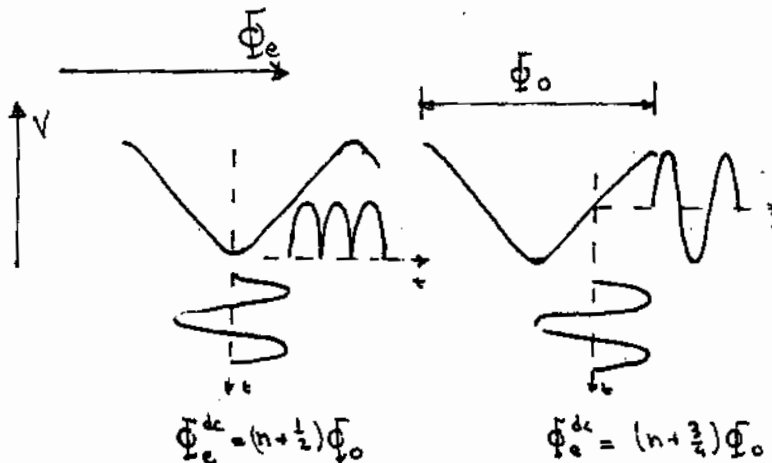
$$\Delta V \approx r_{\text{dyn}} \Delta I_{\text{max}} \approx r_{\text{dyn}} \Phi_o / 2L$$

Den dynamiska resistansen hos de två parallellkopplade övergångarna är approximativt lika med $R/2$, varför:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \Phi_e} \right)_I \approx \frac{R}{L}$$

För $R \approx 1 \Omega$, $L \approx 1 \text{ nH}$ fås en känslighet av ca $2 \mu\text{V} / \Phi_o$.

Den praktiska uppbyggnaden av en dc-SQUID kan förklaras, om vi betraktar spänningen över kretsen som funktion av flöde och applicerar ett modererande flöde; ett periodiskt varierande flöde med frekvensen f ca 100 kHz och en topp-till-topp amplitud av ca $\Phi_o / 2$. Detta skisseras i nedanstående figur. Om det externa dc-flödet genom kretsen är $n\Phi_o$ eller $(n + \frac{1}{2})\Phi_o$ fås en modulationsspänning som har en dominerande komponent vid frekvensen $2f$, medan den vid fundamentalfrekvensen f är minimal. Ändrar vi så dc-flödet till $n + \frac{1}{4}$ (eller motsvarande) ökar amplituden V_f vid frekvensen f till ett maximalt värde.



Mäter vi V_f med en lock-in förstärkare låst till frekvensen f får vi en utsignal från integratorn som är periodisk i Φ_e . Återkopplar vi denna dc-signal till en spole kopplad till SQUID-en, så strävar den att hålla det totala flödet i SQUID-slingan nära $n\Phi_o$ eller $(n + \frac{1}{2})\Phi_o$ beroende på återkopplingens tecken. Ändras nivån hos det externa flödet med $\delta\Phi_e$, så kompenseras detta av flödet $-\delta\Phi_e$ via modulationsspolen. Den ström, som återgår för denna kompensation kan enkelt mätas med t.ex. en digital voltmeter.

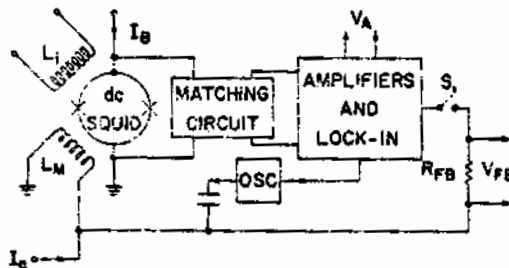


Fig. 4 Conventional phase locked loop dc SQUID readout scheme. With S_1 open this system can also be used to read out the dc SQUID in a small signal amplifier mode in the range of 10-100 kHz.

SQUID-ens upplösning bestäms av brus. Nyqvist (Johnson)-bruset orsakat av shuntresistanserna är en dominerande källa men även andra bidrag beaktas då upplösningen hos magnetometern närmar sig kvantgränsen, t.ex. hagelbrus, nollpunktsfluktuationer och brus från tunnlande flödeskvanta. Vid låg frekvens finns ett svårförklarligt s.k. $1/f$ -brus, möjligen orsakat av termiska fluktuationer. Betraktar vi enbart Nyqvist-bruset kan vi enkelt beräkna brus-spektrat med avseende på spänning S_V vilket vi kan transformera till ett brusspektrum m.a.p. flöde, S_Φ .

I en praktisk tillämpning kopplar man vanligen den signal, som skall mätas, till SQUID-en via en supraledande spole (med induktans L_i). Den relevanta brusparametern innefattar då ej enbart SQUID-ens brus utan också hur väl man kopplar det okända flödet till mätinstrumentets hjärta. Med ömsesidiga induktansen M_i mellan ingångsspole och SQUID-slingan introduceras kopplingsparametern α^2 : $M_i^2 = \alpha^2 L_i L$.

Man brukar definiera energiupplösningen hos instrumentet som energi per Hz från strömmen i ingångsspolen:

$$\epsilon = L_i (\delta I_i)^2 / 2 = S_\Phi L_i / 2 M_i^2 = S_\Phi / 2 \alpha^2 L \quad \text{XII.31.11}$$

Vi har måst multiplicera SQUID-ens energiupplösning per Hz med inversa kopplingsfaktorn - ju sämre koppling ju sämre upplösning (större ϵ). Det gäller att minimera $S_\Phi / 2 \alpha^2 L$ snarare än enbart S_Φ .

Approximativt gäller

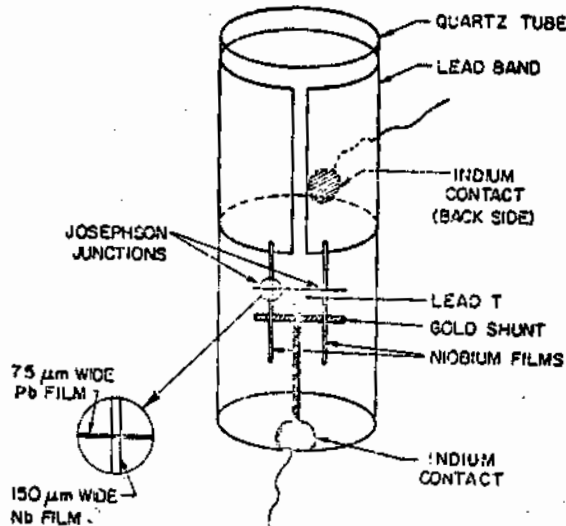
$$\epsilon = S_\Phi / 2 \alpha^2 L \approx 4kT / (R/2L) \quad \text{XII.31.12}$$

Energiupplösningen är således $4kT$ dividerat med den karakteristiska frekvensen (eller sampling-frekvensen) $R/2L$.

I experiment har man mätt så höga energi (per Hz)-upplösningar som

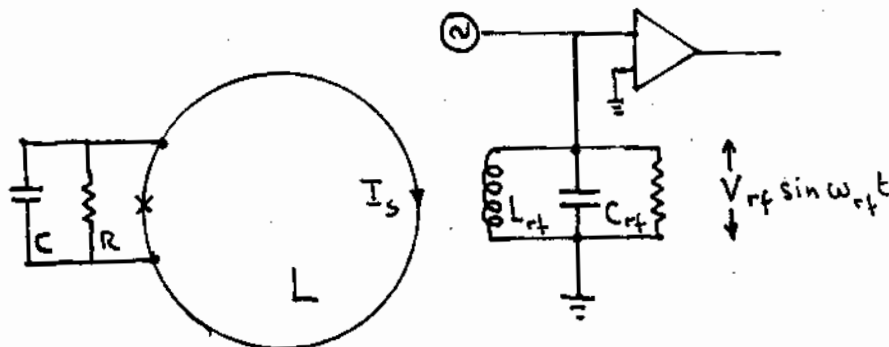
$$\epsilon \approx \text{några gånger Plancks konstant } h.$$

Ett exempel på uppbyggnaden av en dc-SQUID ges i nedanstående figur. Där kopplar man sig till övergångarna genom att göra en del av slingan i form av ett uppskuret supraledande cylinder-skål förångat på ett kvartsrör. Exemplet ges p.g.a dess åskådlighet och historiska värde. Det var den första praktiska dc-SQUID-en med lågt brus, $\epsilon \approx 10^4 h$ för $0.01 < f < 200$ Hz och med en ingångsspole på 24 varv. Senast utvecklade dc-SQUID-ar består av tätt packade tunnelövergångar i mikrometerstorlek i flat geometri. En möjlighet att koppla sig till SQUID-en är via en förångad, flat, spiralformad spole. Med sådana har man mätt $\epsilon \approx (3 - 10) \times h$.



XII.31.b. rf-SQUID.

En rf-SQUID består av en supraledande ring med induktansen L (typiskt 1 nH), vilken är avbruten med en Josephsonövergång med kritisk ström I_0 (vanligen omkring ϕ_0/L) shuntad med resistansen R och kapacitansen C . $\beta_c \ll 1$ så att ström-spänningskaraktäristiken för tunnelövergången visar hysteres. Josephsonövergången har tidigare nästan alltid varit en punktkontakt av Nb men är idag ofta en tunnelövergång. Till den supraledande slingan kopplas en extern pumphsignal (frekvens ofta 20 - 40 MHz, men frekvenser i mikrovågsbandet, ca 10 GHz, har också prövats) via en resonanskrets:



Spänningen hos drivkretsen är vald så, att toppvärdet av den i ringen inducerade strömmen just underskrider den kritiska strömmen. Om nu ett externt magnetiskt fält appliceras, så induceras skärmströmmar i ringen, och den maximala strömmen kommer att överskridas på ena sidan av rf-cykeln. När den kritiska strömmen överskrids börjar flödeskvanta strömma in i kretsen varvid en spänningspuls induceras. Därvid exciteras mikrovågsmoder i den svaga länken, normal strömtransport ger även dämpning. Energin tas från resonanskretsen, som var kopplad till ringen, dess Q -värde minskar och en minskad spänning (vid konstant strömkälla) kan detekteras och förstärkas. Denna spänning är periodisk i applicerat magnetfält, perioden motsvarar en ändring av ett flödeskvantum i den supraledande kretsen. Genom negativ återkoppling kan man tillföra en likström som just kompenserar det pålagda fältet. Denna likström kan mätas med digitalvoltmeter. Ändringar i magnetfält så små som $10^{-14} - 10^{-15} T$ ($10^{-10} - 10^{-11} G$) har detekterats. Låt oss studera en SQUID's verkningsätt mera i detalj:

Förhållandet mellan flöde i ett hål i en supraledande krets ϕ_T , ett externt pålagt flöde ϕ_{ext} och inducerade strömmen I_s , är

$$\phi_T = \phi_{ext} + LI_s$$

Kvantisering av flöde innebär, att $\phi + 2\pi\Phi_T/\phi_0 = n \cdot 2\pi$, där ϕ är fasskillnaden över den svaga länken.

Således

$$I_s = I_0 \sin \phi = -I_0 \sin(2\pi\Phi_T/\phi_0)$$

$$\phi_T + L I_0 \sin(2\pi\Phi_T/\phi_0) = \phi_{ext}$$

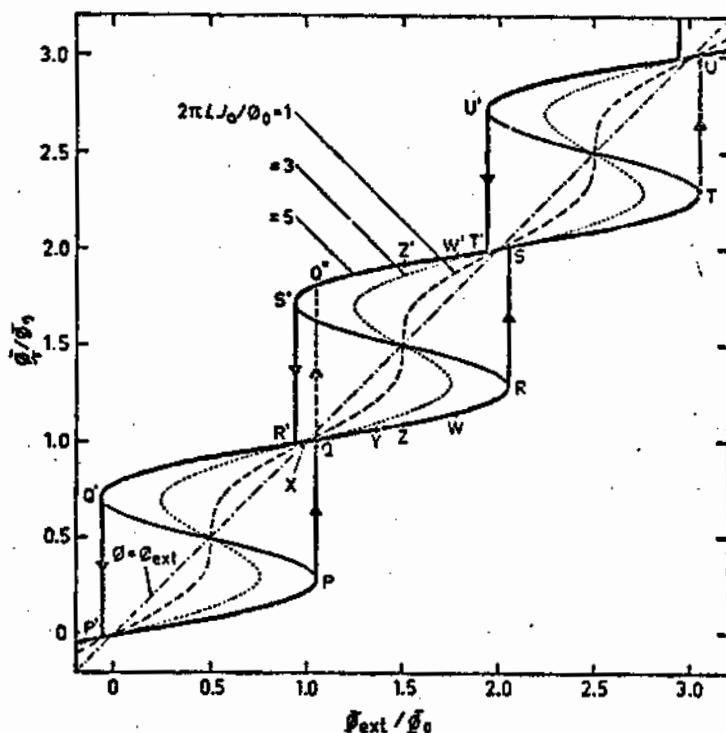
XII.31.13

Ett studium av derivatan

$$d\phi_T/d\phi_{ext} = 1/[1 + (2\pi LI_0/\phi_0) \cos(2\pi\Phi_T/\phi_0)]$$

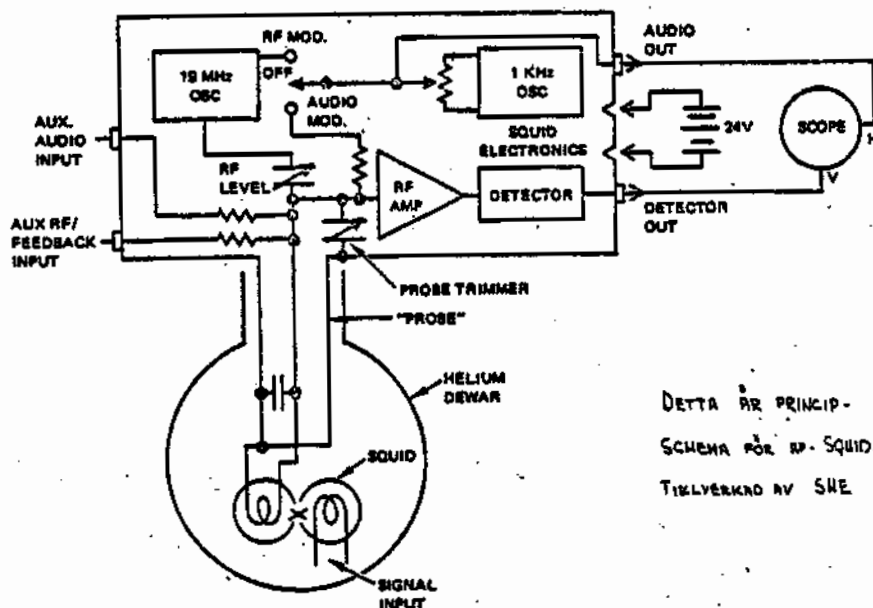
XII.31.14

visar att denna alltid är positiv för $2\pi LI_0/\phi_0 < 1$. Är $2\pi LI_0/\phi_0 > 1$ ändrar derivatan tecken genom ett oändligt värde, vilket innebär att Φ_T ej längre är oändligt bestämd av ϕ_{ext} (fara för hysteres). Förhållandet visas av följande figur:



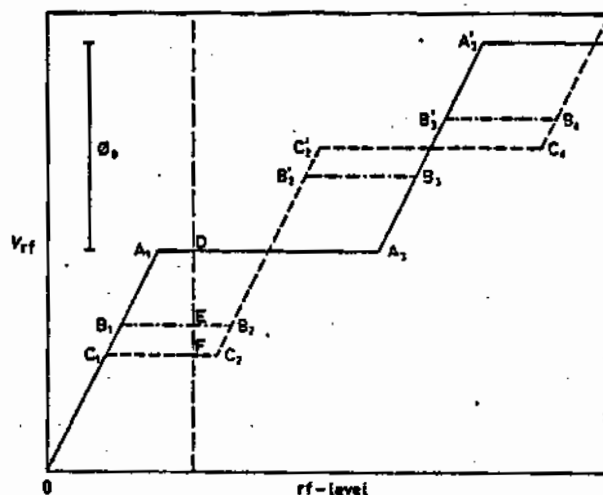
För mycket svagt kopplade supraledare, $2\pi LI_0 \ll \Phi_0$ fås att Φ_T nästan är lika med Φ_{ext} . För $2\pi LI_0 \gg \Phi_0$ fås stark skärmning, $\Phi_T \approx 0$. Det för en SQUID intressanta området är $2\pi LI_0 \approx \Phi_0$. För detta fall ökar Φ_T till en början mycket långsammare än Φ_{ext} . pga. inducerade skärmströmmar. Då I_0 närmas, ökar Φ_T snabbare, tills vi får en instabilitet vid P. Flödet i hålet hoppar nu från P till Q. Ytterligare ökning av det pålagda fältet innebar att det inneslutna flödet fortsätter längs kurvan Q - R - S etc. (Hur varierar skärmströmmen?) Om nu Φ_{ext} minskas följs kurvan S - S' - R' - Q' - P'. Vi har här en hysteres.

Låt oss nu linda en spole och sätta in denna inuti hålet i den supraledande kretsen med den svaga länken. Induktansen kopplar vi parallellt med en kondensator till en rf-krets, t.ex. enligt följande figur:



DETTA ÄR PRINCIP-
SCHEMA FÖR RF-SQUID.
TILLVERKAD AV SNE

Hur varierar V_{rf} och J_{rf} , spänningen och strömmen över rf-spolen, som funktion av pålagd rf-nivå? Låt oss också, som en parameter, på något sätt variera en skärmström genom den svaga länken. Genom variation av denna senare parameter lägger vi oss i punkten X i diagrammet över Φ , som funktion av Φ_{ext} (kallas fig. Φ). Därefter ökar vi rf-nivån succesivt. Då Φ_{ext} är direkt proportionell mot J_{rf} fås oscillationer kring punkten X. Amplituden beror på ömsesidiga induktansen och på ohmska förluster i rf-kretsen. Allt eftersom rf-nivån ökar, ökar spänningen över spolen ($V_{rf} = \omega L_{rf} J_{rf}$) tills oscillationsamplituden i Φ_{ext} blir lika med XR. Detta motsvarar OA_1 i förra figuren (kallas V_{rf} -fig.).



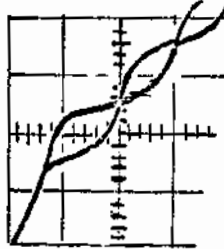
Nu ökar vi rf-nivån ytterligare.

Då kommer vi i Φ -figuren att röra oss längs XRSS'R'X, dvs. runt en hysteres slinga. Detta absorberar energi från rf-resonanskretsen, $-dW = \text{ytan av hysteres slingan dividerad med } L$ (för $2\pi LI_0 = 5\Phi_0$ fås $dW = 0.85 \Phi^2/L$). Denna energi tas från resonanskretsen. Detta innebär att spänningen över denna sjunker dramatiskt. Ingen ytterligare övergång kan ske förrän spänningsamplituden har byggt upp sig till det kritiska värdet A_1 igen. För en krets med högt Q-värde tar detta flera perioder. Spänningen över $L_{rf}C_{rf}$ -kretsen undergår en sågtandsmodulation. Ökas rf-nivån över det kritiska värdet kommer oscillationsamplituden att växa upp snabbare efter en chock-sänkning och frekvensen hos sågtansspänningen ökar. Det är emellertid ej möjligt att öka V_{rf} över plattan A_1A_3 förrän högfrekvensnivån är så stor, att två hysteres slingor (dvs. QRSS'R'Q'P'PQ i Φ -figuren) genomgås. Ökas nu rf-nivån ytterligare, ökar amplituden i Φ_{ext} tills punkten T nås. På samma gång ökar V_{rf} från A_3 till A_3' . V_{rf} överskrider sedan inte nivån vid A_3' förrän rf-nivån har ökats så pass mycket att energin räcker till för en genomgång av 4 hysteres slingor under en period osv.

Nu kan vi ändra på vår parameter, t.ex. ett externt fält, så att vi flyttar arbetspunkten från X till Z ($\Phi_{ext}/\Phi = (2n + 1)$ i Φ -fig. Ökar vi nu rf-nivån igen ökar V_{rf} tills flödesamplituden = ZR_0 , dvs. tills V_{rf} når C_1 . V_{rf} (toppvärdet) kommer inte att öka över C_1 förrän rf-nivån är så pass hög, att en hel hysteres slinga ZRSS'R'Z kan genomlöpas på en period (hur förändras Φ_{ext} efter en dissipativ övergång?). Detta motsvarar punkten C_2 i V_{rf} -fig. V_{rf} kommer sedan att öka med ökande påförd rf-effekt tills en andra övergång inträffar vid T' (eller Q') resp. C_2' . Toppvärdet av V_{rf} förblir sedan konstant tills 3 hysteres slingor, ZRSTUU'T'-S'R'Q'P'PQZ genomlöpas under varje period osv.

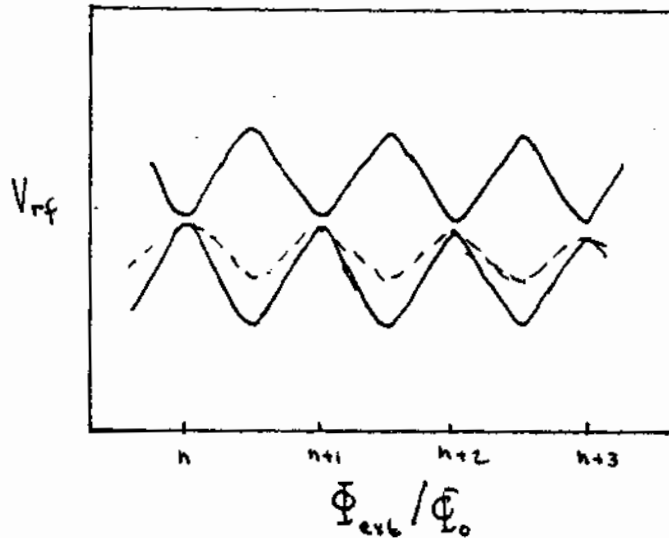
Om vi nu ändrar vår yttre parameter så att arbetspunkten hamnar i Y hurudan blir då vägen i V_{rf} -figuren?

En serie V_{rf} vs rf-nivå kurvor kan upptas på ett oscilloskop vid olika arbetspunkter (rör t.ex. en permanentmagnet utanför kryostatens). Sådana kurvor uppvisar rundade hörn jämfört med V_{rf} -fig. Detta beror på fluktuationer i den svaga länken.



Men ännu har vi inte ett mätinstrument (fastän vi är nära), som ger V_{rf} - vår parameter, dvs. mot Φ_{ext} . Välj nu konstant rf-nivå, t.ex. motsvarande den vertikala, streckade linjen genom DEF i V_{rf} -figuren. Mäter vi nu V_{rf} som funktion av vald arbetspunkt (Φ_{ext}), fås en triangulär modulation. Startar vi från X resp. D avtar V_{rf} proportionellt mot Φ_{ext} till den når nivån F då dc-arbetspunkten flyttats till Z. Fortsätter vi sedan med Φ_{ext} mot K ökar V_{rf} mot nivå D igen. En fortsatt ökning av Φ_{ext} från S till T medför att V_{rf} minskar till F och ökar till D, osv. Perioden i oscillationerna i Φ_{ext} är Φ_0 enligt den undre kurvan i nästa figur. Ett instrument, som mäter ändringar i Φ_{ext} är realiserat.

Hur beror mätinstrumentet på tillförda rf-effekten? Ökvar vi nivån händer inget förrän vi når punkten C_2 i V_{rf} -fig. Därefter avtar amplituden i den triangulära modulationen. Vid en nivå motsvarande B_2 fås en variation enligt den streckade kurvan. Då rf-effekten ökar ytterligare fås ingen modulation då nivån ligger halvvägs mellan A_1 och A_3 i V_{rf} -fig. När nivån överskrider C_2' fås en modulation enligt den övre kurvan i nedanstående figur.

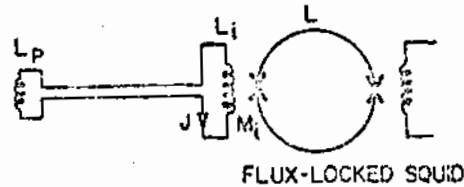


Den beskrivning av en SQUID, som vi gett är korrekt om rf-resonanskretsen har ett högt Q-värde, och om ömsesidiga induktansen mellan rf-spolen och den supraledande slingan är så pass stor att energiförlusten, som fås vid genomlöpanget av en hysteresslinga, är betydligt större än den ohmska energiförlusten i resonanskretsen per period.

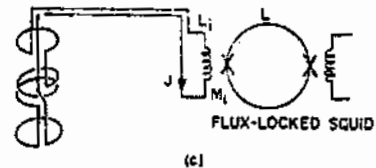
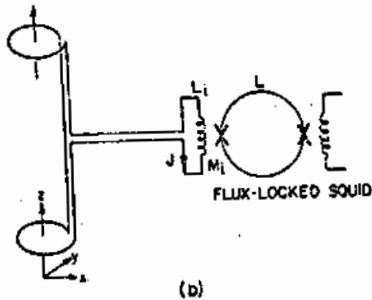
En modulering av flödet i ringen via en lågfrekvent signal och återkoppling, som vi diskuterat tidigare, ger möjlighet till digital avläsning.

XII.31.c. Flödestransformator.

Det externa fält, som man vill mäta, kan kopplas till ingångsspolen i SQUID-en via en flödestransformator lindad av supraledande tråd enl. figur. I en supraledande slinga är totala magnetiska flödet konstant - en variation i ena delen kompenseras av en ändring i den andra.



Genom att dela upp flödestransformatoren i olika, i rummet skilda, delar med motriktade lindningar kan olika former av gradiometrar tillverkas.



XII.31.d. Användningsområden för SQUID-ar.

Främsta användningen av en SQUID är för att bestämma ändringen i det magnetiska flödet. Känsligheten hos en SQUID har betonats. I sanningens namn bör erkännas att förutom några enstaka applikationer (t.ex. för att detektera gravitationsvågor) så behöver man ej den maximala känsligheten. I stället nöjer man sig kanske med en känslighet av ca 10^{-31} J/Hz och betonar i stället andra viktiga egenskaper som dynamiskt område (dvs. största storlek av flödesändring, som instrumentet kan följa), snabbhet ("slewing rate"), stabilitet, lätthanterlighet och möjlighet att enkelt byta ingångsspolar.

Eftersom ett magnetiskt flöde är associerat med ström i en ledare, kan en SQUID också mäta strömmar. Den främsta fördelen med strömmätaren är att dess inimpedans är låg (resistansen är noll, induktansen kvarstår). Den kan fungera som nollinstrument i en voltmeter för spänningar över lågimpediva källor (en känslighet av ca 10^{-18} V bör kunna nås). Det är viktigt, att det känsliga instrumentet skyddas från störningar från omvärlden. Alla nedgående ledningar måste filtreras, supraledande skärmar anbefalles, etc.

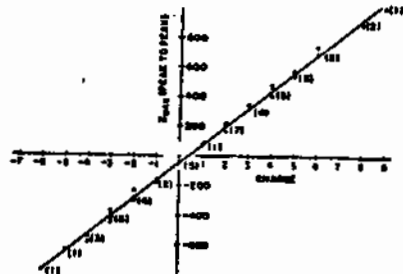
Kvantinterferometrar (SQUID) av såväl dc- som rf-typ har nått imponerande känsligheter vid mätningar av ändringar i magnetiska flöden. De allra högsta känsligheterna ger dc-SQUID (där man har en hög intern frekvens då de två shuntade tunnelövergångarna har en dc-spänning över sig). Man kan detektera mycket små fält, t.ex. de som bildas då hjärtmusklerna arbetar eller då strömmar flyter genom hjärnan eller i nerver. Intressanta försök pågår inom det medicinska fältet. Ett problem är att skärma alla störningar. Man har ju ingen större nytta av en fabulös känslighet, om det bara är oönskade störningar man ser. Två sätt har använts för att

eliminera störkällor. Antingen har man nyttjat dyra magnetiskt skärmade rum eller också olika gradiometerkopplingar. Använder man två seriekopplade, motriktade supraledande spolar, så kommer de kopplade flödena att ta ut varandra om källan till det magnetiska fältet ligger långt borta.

Susceptibiliteten hos ett prov kan mätas som funktion av temperaturen med supraledande interferometrar. Wheatley har gjort sådana mätningar i utspädningskryostat. Susceptibiliteten hos paramagnetiska salt eller kärnsinn kan även mätas för temperaturbestämningar. En upplösning av 50 μ K vid 10 mK (och en flödestäthet av 10^{-5} Vs/m² lagd på Cu) har rapporterats av en grupp vid Cornell. Det finns även ett annat sätt att mäta temperaturen m.h.a. en SQUID. Sätt in en resistiv del i den supraledande ringen. Denna del har termiskt Johnsonbrus, vilket ger upphov till en frekvensmodulering av Josephsonväxelströmmen. Linjevidden hos strålningen beror på resistansens temperatur enligt $4\pi kTR/\phi \approx 4 \cdot 10^{-7}$ RT. Här har vi en absoluttermometer, som tycks kunna användas ned till mK-området.

Känsliga gravitometrar har konstruerats. Tänk er en ping-pong boll av Nb eller Pb. När denna är supraledande kan den lyftas av ett magnetiskt fält (vårt supraledande lager igen), som just kompenserar jordens dragningskraft. Gör fältspolarna av supraledare och sänd en stående ström genom dem; då blir fältet mycket tidsstabil. Bollens rörelse kommer helt att bestämmas av ändringar i gravitationsfältet. Rörelsen kan detekteras m.h.a. en SQUID som kopplas med en supraledande transformator till systemet. Lägesförändringar mindre än 1 Å kan detekteras. Detta innebär att den teoretiska accelerationskänsligheten blir ca $15 \cdot 10^{-12}$ cm/s² (hur jämför den sig med g?). Ca 70 olika svängningsmoder i jordens oscillation har detekterats. Speciellt starka blir vissa moder vid jordbävningar. En liknande detektor används för att detektera eventuella gravitationsvågor, som kommer in från rymden. Här använder man sig dock av en stor aluminiumcylinder på flera ton. Den kyls till låg temperatur, så Al blir supraledande, och hålls svävande i ett magnetiskt fält.

En liknande mätapparat har använts för jakt på kvarkar. Här mäter man istället laddningen på supraledande sfärer som oscillerar i en plattkondensator. Resonansamplituden bestäms av klotets laddning och mäts med en supraledande kvantinterferometer.



Plot of resonant amplitudes versus integer charge assignments. The total number of points assigned to each value of charge is indicated in parentheses.

Resultatet av en preliminär mätning följer av vidstående figur. Mer återstår att göra innan man kan uttala sig om kvarkars verkliga förekomst. (Fråga: hur skiljer sig den beskrivna mätmetoden från Millikans oljedroppsmetod?).

Man tänker sig även använda Josephson-elementet för geologiska undersökningar, t.ex. för malmletning. Magnetotelluriska mätningar kan informera om konduktivitetens djupberoende i jordskorpan. Ubåtar skulle även kunna detekteras. Här har vi berört flera användningar av kvantinterferometrar. Fler och fler görs varje år. Hitta själv på en användning.

MÄTAPPLIKATIONER GRUNDADE PÅ SQUID

Fysikalisk forskning.

susceptibilitet
temperaturmätning (kärnsinn och Johnsonbrus)
resistans
termoemk
supraledning
vektorpotentialer
jaga kvarkar
gravitationsvågor
monopoler

Medicinska mätningar.

Mätning av magnetiska fält från olika organ, t.ex. slående hjärta, tänkande hjärna, reagerande muskler. Svetsrök i lungor. Magn. mätningar biomaterial.

Geologiska undersökningar.

Prospektering av olja och malm.

Geotermiska källor gm magnetotelluri, som mäter resistans med djup genom skindjupets frekvensberoende.

Förvarna jordskalv.

Landhöjning, -sänkning.

Militära applikationer.

Detektera magnetiska föremål.

Kommunikation genom vatten och jord.

XII.32. Datortillämpningar.

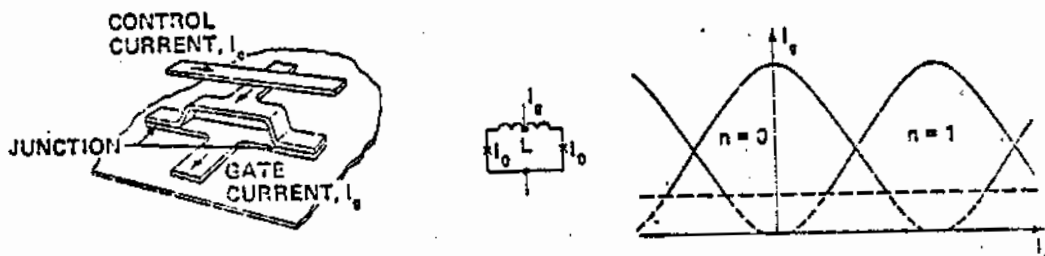
Ett Josephsonelement fungerar som en snabb vippra. Det förmår leda en viss ström ($< I_0$) utan spänningsfall ($I_c = 0$) men appliceras ett magnetfält, eller en kort strömpuls, överskrids den kritiska strömmen och övergången hoppar till ett tillstånd med i stort sett nollström och en ändlig spänning nära gapspänningen ($0, 2\Delta/e$). Omslaget är mycket snabbt, av storleksordningen pikosekunder. Vad som är minst lika viktigt är att den utvecklade värmeeffekten är låg. Detta är betydelsefullt, ty i en snabb maskin skall komponenterna packas tätt. Informationsöverföringen begränsas i stort sett av ljushastigheten. När man kommer ner till cykeltider av storleksordningen ns måste datorn packas in i en kub med ca 10 cm sida.

En viktig parameter är effektutveckling - tidsfördröjningsprodukten (Power-Delay-Product) som kan bli av storleksordningen 10^{-18} J för en Josephsonövergång. Detta är flera tiopotenser lägre än vad man tycks kunna göra med halvledarteknologi. Den praktiska förbättringen av datorer har lett till omfattande forsknings- och utvecklingsinsatser under de senaste åren. Det är ännu för tidigt att sja om den kommersiella genomslagskraften av supraledande datorer. Utvecklingen är dock mycket spännande (trots att IBM dragit ned sitt arbete).

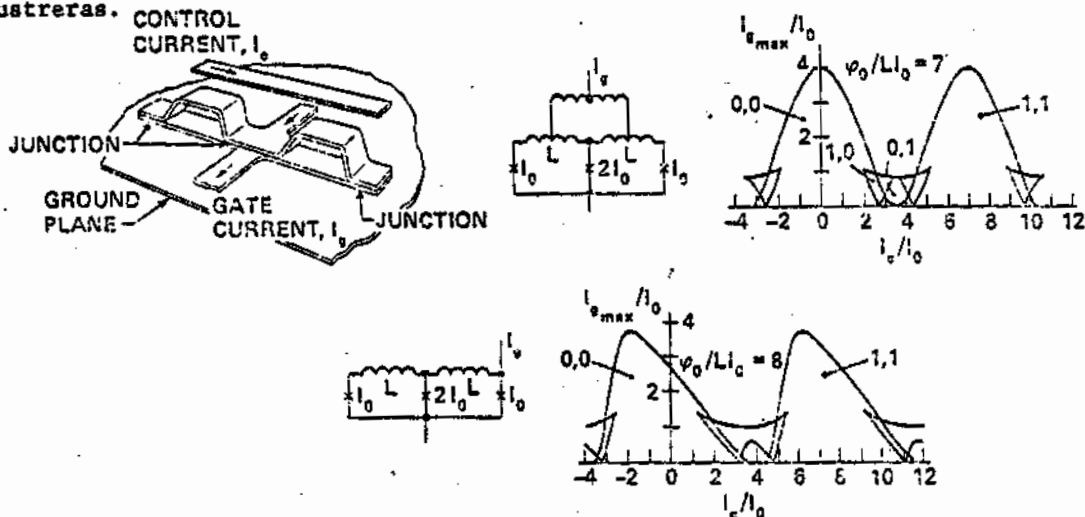
Här ges endast en kort beskrivning av byggstenarna i en supraledande dator. För övrigt hänvisas till den rika litteraturen; några referenser ges i slutet av kapitlet.

XII.32.a. Logiska kretsar.

En logisk datakrets, en vippra, kan utgöras av en Josephsonövergång. Emellertid fordras en relativt hög magnetfältspuls för att driva elementet normalt, dvs. en relativt hög ström i en kontrollslinga som kanske drives av ett annat element. Det kan vara svårt välja impedansnivån rätt. Ett datorelement uppbyggt av två, eller flera, interfererande övergångar, en dc-SQUID, är ofta fördelaktigare än en enstaka övergång. Den ger större friheter i kretsdesign, separerar kontrollregionen från tunnelområdet och utvecklar mindre effekt och ger större förstärkning. Karakteristiken för en sådan interferometer ges i figur nedan. P.g.a. kretsens induktans går totala maximala strömmen ej ned till noll mellan tillstånden vid noll och ett (o.s.v.) flödeskvanta i slingan.



Motsvarande karakteristik för ett element med tre övergångar ges också. Kretsen kan mätas symmetriskt eller osymmetriskt, skillnad i karakteristik ((med grindström mot kontrollström) illustreras.



Kretsarna kan styras magnetiskt, genom en strömgensluten kontrollström, eller med hjälp av en strömpuls som injiceras så att kritiska strömmen överskrids momentant. Den magnetiskt styrda vippan isolerar ingång från utgång men fordrar större plats än den strömstyrda.

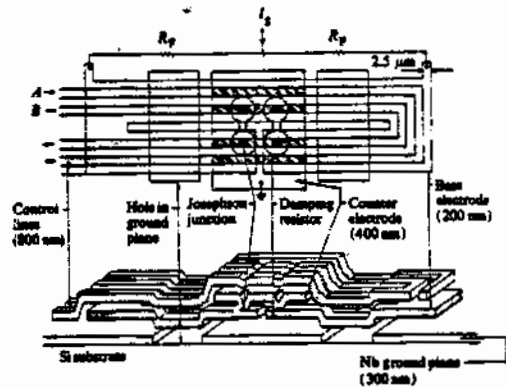
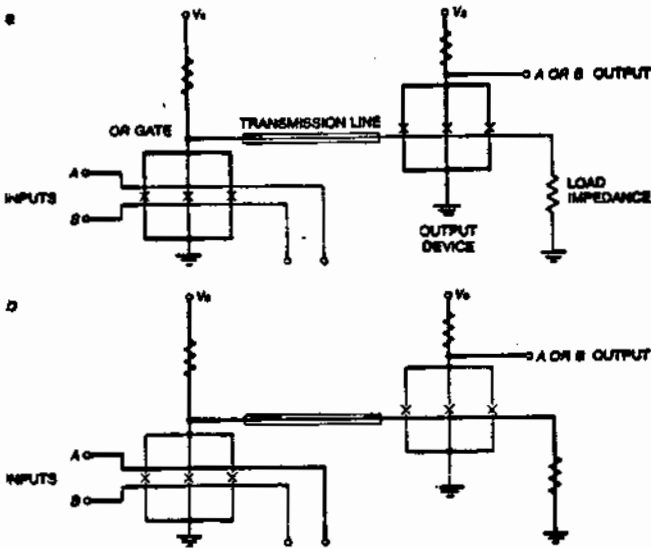
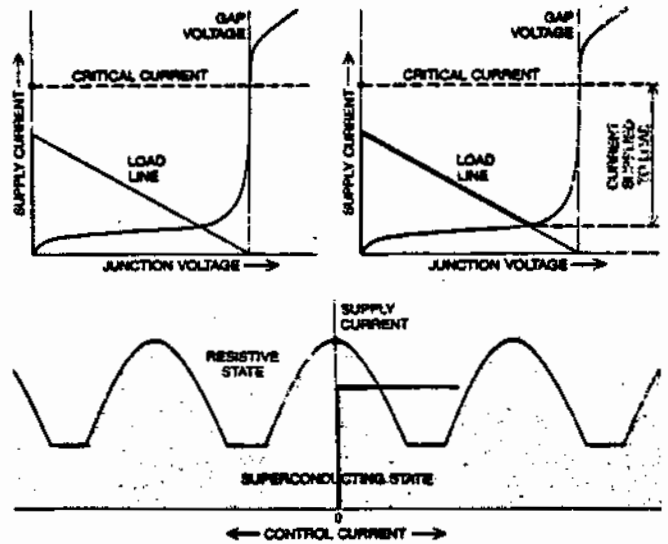


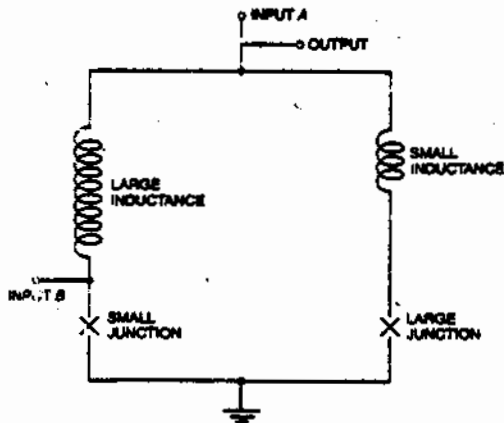
Figure 6 Salient features of the layout and vertical structure of the three-junction interferometer.



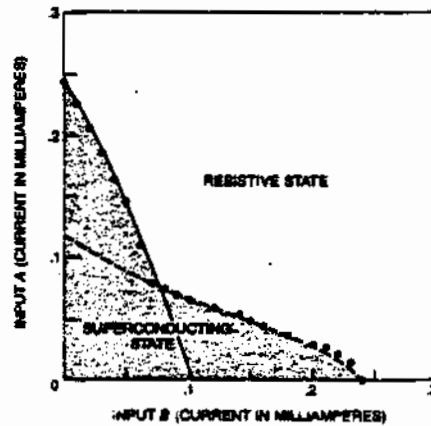
LOGICAL "OR" GATE, a basic circuit of the control processor of a computer, consists of a three-junction interferometer with two control lines. When the device is first turned on (a), the gate is superconducting, so that the supply current is shunted to ground and no voltage appears at the output transmission line. An input applied to either of the control lines switches the gate (b) and its resistance increases from zero to several hundred ohms. As a result the supply current is diverted into the output line, which serves as the control line for a second gate. The device is called an OR gate because it can be triggered by a single input either on control line A or on control line B; two inputs also switch the device. The gate latches automatically: once a voltage has developed, superconductivity is recovered only when the supply current is interrupted.



STEERING OF CURRENT into the output line takes place rapidly when the OR gate switches to the resistive state. Initially the supply current flows through the interferometer loop at zero voltage (upper left). An input has the effect of lowering the critical current (upper right), with the result that a voltage appears across the junction. The state of the system follows a trajectory called the load line, whose slope is fixed by the impedance of the output circuit. Loss of superconductivity is caused by the magnetic field generated by the control current (lower graph).



CURRENT-INJECTION DEVICE acts as an adder of electric currents, which switches from the superconducting state to the resistive state only when the sum of two currents exceeds a threshold. The currents divide asymmetrically in the interferometer loop because of differences in inductances.



As is shown in the graph at the right, either one of the inputs by itself can trigger the gate only if the current is greater than about .25 milliamperes. If both inputs are present, the gate changes state when each input supplies as little as .1 milliamperes.

Med hjälp av dessa kretsar kan man bygga upp de logiska grundelementen ELLER ($A + B$, ström genom A eller B får elementet att gå normalt) OCH ($A \cdot B$, ström fordras både i ledningar A och B för att elementen skall reagera) samt INVERT.

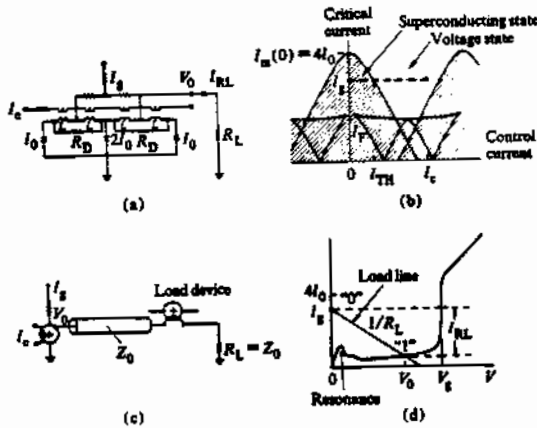


Figure 1 (a) Three-junction $I_s, 2I_0, I_0$, split-feed interferometer. (b) Threshold curve of the three-junction interferometer. (c) Schematic representation of a three-junction interferometer as a switching device with matched, superconducting transmission line and a serially connected load device. (d) I - V curve of the interferometer and the load line indicating the switching between the superconducting state corresponding to the "0" logic level and the voltage state V_0 corresponding to the logic level "1."

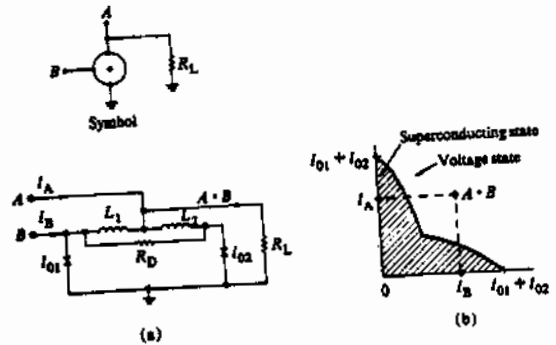
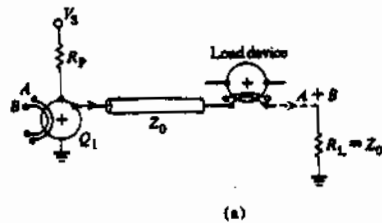
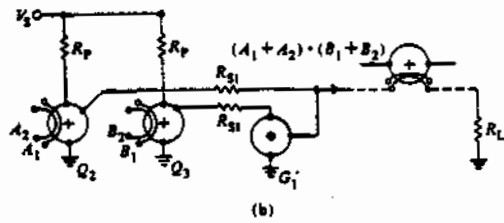


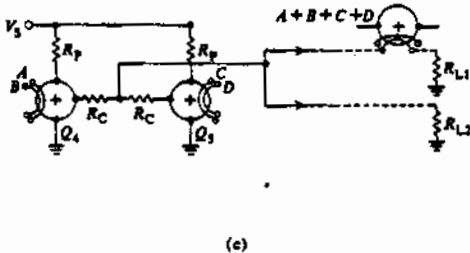
Figure 2 (a) Two-junction injection gate and its symbol. (b) Nonlinear threshold curve of the injection gate performs the $A \cdot B$ function. The injection gate switches to the voltage state only when both the inputs I_A and I_B are on.



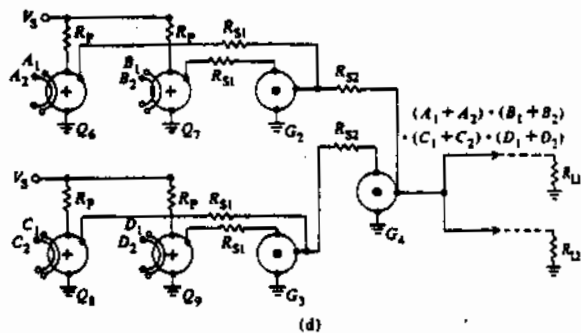
(a)



(b)



(c)



(d)

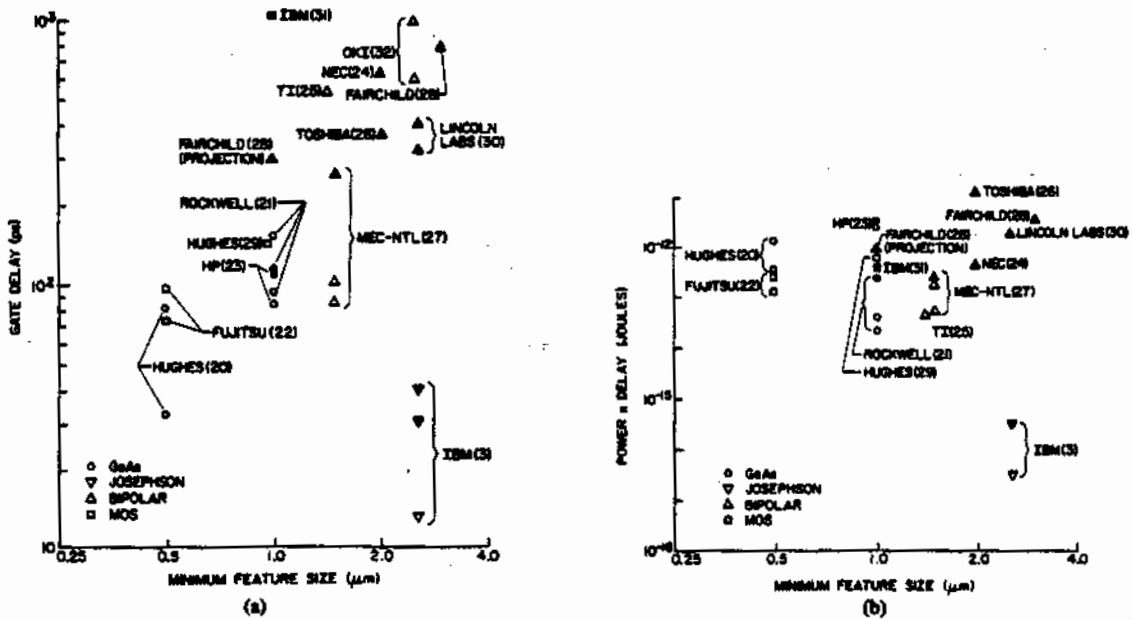
Figure 3 CIL circuits: (a) Two-input OR gate, (b) two-input AND gate which also performs the EXCLUSIVE-OR function $(A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$, (c) four-input OR gate, and (d) four-input AND gate. [Circles with + (OR) signs represent the three-junction interferometers and the circles with * (AND) signs represent the injection gates.]

Bland betydelsefulla egenskaper hos ett logiskt element är dess snabbhet, effektutveckling, isolering in-/utgång samt möjligheter att styra flera andra element ("fan-out"). Fördröjningen ges av (i) tid för att ändra fasen i övergången ("trigger delay"), (ii) RC-tiden, (iii) tid för puls att propagera på transmissionsledning (ca 0.01 ps/ μm), (iv) induktiv fördröjning vid utläsning (ca 5 - 16 ps per fan-out). Exempel på fördröjningar ges i nedanstående tabell.

Delay components and power dissipation of the experimental CIL test circuits for the nominal gate current $I_g = 0.7 I_m(0)$.

Gate	Total delay t_d (ps)	Turn-on & rise time t_r (ps)	Crossing delay t_c (ps)	Propagation delay t_p (ps)	Power dissipation T_d (μW)
2-OR	26	17.1	6.5	2.4	1.9
2-AND	32	20	6.5	5.5	4.5
4-OR	53	27.1	19.5	6.4	4.3
4-AND	63	47.2	6.5	9.3	8.3
Mean	43.5	27.9	9.75	5.9	4.75

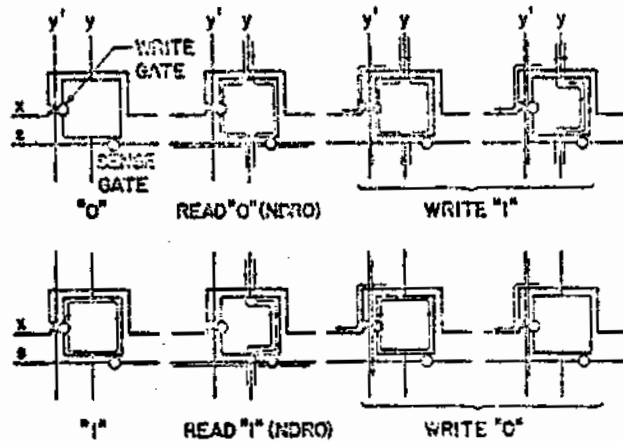
Liksom i halvledarkretsen ökar snabbheten vid mindre dimensioner. Korta omslagstider har också uppmätts för halvledare. Dock är värmeutvecklingen vid omslaget avsevärt större i det senare fallet. Vad som är viktigt är produkten av fördröjning och värmeutveckling vilken det gäller att hålla så liten som möjligt. Uppnådda prestanda visas i figurer nedan. Josephsonteknologin har ej drivits lika långt som halvledarteknologin - 2.5 μm linjebredd är gränsen idag för praktiska kretsar. Ingen fundamental skillnad existerar dock mellan supradelar- och halvledarteknologierna vad beträffar storleken hos komponenterna.



(a) The gate delays for the leading semiconductor technologies are compared with the Josephson logic circuit gate delays as a function of their minimum feature size. (b) The power-delay product for the semiconductor technologies is compared with the Josephson power-delay products. The hollow symbols represent low fan-in/fan-out circuits or ring oscillators.

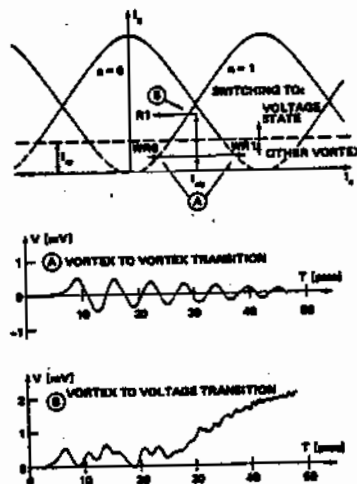
XII.32.b. Minneselement.

I en dator med en virtuell minnesupbyggnad behöver man minst två nivåer av minnen: ett snabbt minne i nära anslutning till och med samma cykeltid som CPU (s.k. "cache memory") samt ett stort huvudminne, som kan tillåtas vara långsammare. Snabba minnesceller med icke-destruktiv utläsning ("non-destructive read out", NDRO) har konstruerats m.h.a. Josephsonelement enligt figur



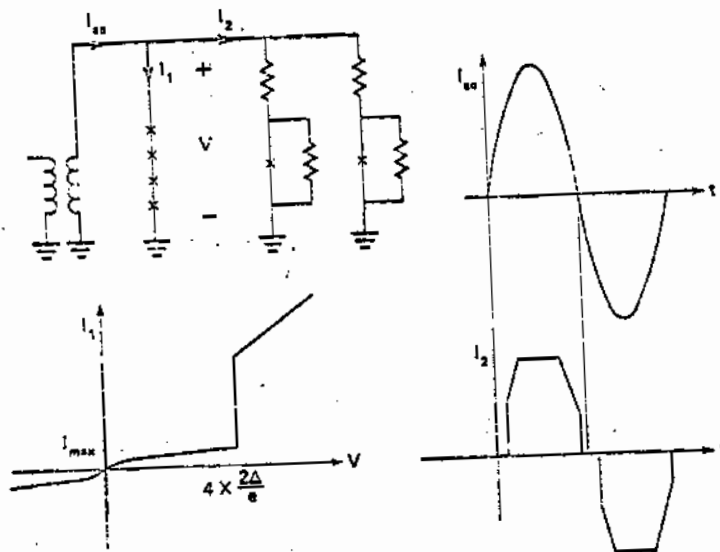
The cache memory cell stores information as a quantized circulating current for a "1" and no current for a "0". The write gate momentarily opens the storage loop during switching. Non-destructive reading (NDRO) is obtained through the switching of an inductively coupled sense gate. All possible cell functions are indicated.

Denna typ av snabba minneselement är relativt stor (typiskt ca 50 x 50 μm vid 2,5 μm teknologi) och utvecklar relativt hög effekt. Avsevärt tätarepackade minnesceller med låg effektförbrukning kan byggas med hjälp av enkla två-övergångs-SQUID-ar. Magnetiska flödet i en SQUID-slinga är kvantiserat. Vi har tidigare sett att tillstånden med noll och ett flödeskvantum överlappade i kurvan för grindström som funktion av kontrollström. Man kan läsa in information i minnescellerna i form av lagrade flödeskvanta. Vid utläsningen raderas informationen och måste återlagras (DRO, destructive read-out).



XII.32.c. Kraftförsörjning.

Logikelementen som vi beskrivit, stannar kvar i sitt spänningstillstånd efter omslaget ("latching"). Detta gör inget, ty vi kan konstruera strömförsörjning så att strömmen genom elementen går ned till noll i varje cykel. Då nollställs alla omslagna kretsar. Eftersom Josephson-karakteristiken är symmetrisk för positiva och negativa spänningar, kan man använda en växelströmsförsörjning. Ett sådant nät, som bygger på tunnelövergångar som regulatorer skisseras i följande figur. Med fyra blyövergångar i serie får man regulatorn att klippa vid ca + 12 mV. Man kan lägga en sådan strömförsörjning på varje "chip" nära kretsen som skall försörjas, vilket är en fördel. Alternativt kan man använda sig av element, som automatiskt återgår till det supraledande tillståndet efter omslag ("non-latching") och istället ha likströmsförsörjning. Emellertid måste man då ha en separat klocka. (Växelströmmen fungerar automatiskt som klocka.)



XII.32.d. System.

En CPU eller en hel dator kan byggas upp med hjälp av de beskrivna byggstenarna. Förbindningar och packning innebär väsentliga problem, vilka vi dock ej kan gå in närmare på här. Nämnas bör dock att en stor fördel med den Josephsonbaserade datorn är att transmissionsledningarna är uppbyggda av supraledare. Korta pulser breddas mycket mindre då de sänds på supraledande transmissionsledningar än på icke-supraledande.

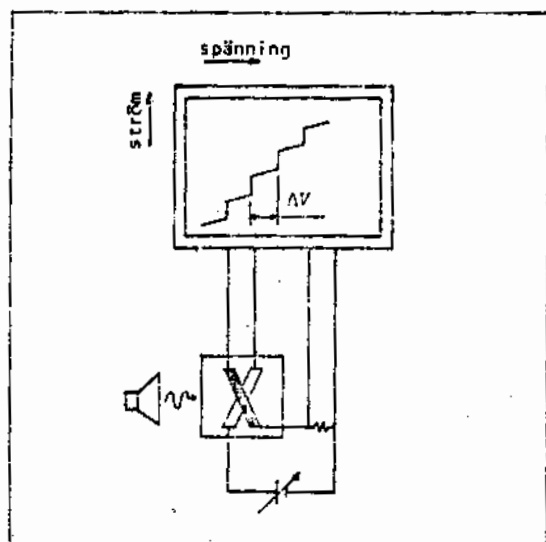
En möjlig uppbyggnad av en supraledande dator skisseras i följande tabell.

Content	Size μm or mm	Function	Delay	Power
Junction	2.5 μm x 2.5 μm (present) 1 μm x 1 μm (proj.)	Switch	<10 ps	25 μW (on position)
SQUID	2-4 μm	Logic switch or memory cell	~10 ps	
Circuit	SQUID 20 μm x 20 μm 2 SQUID's 50 μm x 50 μm 2 SQUID's 50 μm x 50 μm SQUID 20 μm x 20 μm	Logic OR Logic AND NDRO fast memory SFQ dense memory	~10 ps ~60 ps	5 μW 6 μW
Chip	6x6x1 (mm) ³	Logic circuits NDRO memory SFQ memory	100 ps corner to corner 1 ns access 15 ns access	~3 mW ~6 mW 40 μW
Module	2x6 chips 10x6 cells or 1Mbit	CPU Dense RAM	400 ps corner to corner 10 ⁸ insu/s	~1 W 0.5 W
Mainframe	400 mod's	1.0x1.5x1.5	~1 ns max prep. time	~1W at 4K

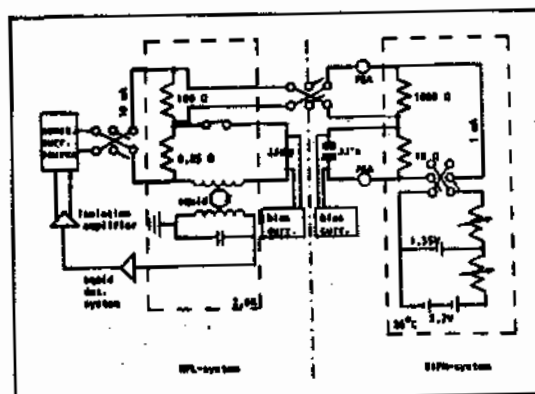
XII.33. Högfrekvenstillämpningar av tunneleffekter.

Vi har redan berört några högfrekvensapplikationer, nämligen oscillatorer och voltstandard. Ett Josephsonelement är en svepbar oscillator, som fungerar inom ett svåråtkomligt frekvensintervall. Dock är den utsända strålningseffekten låg och frekvensbreddningen är avsevärd. Ett sätt att lösa dessa problem är att låta flera oscillatorer samverka. Signalamplituderna adderas i gynnsamma fall och frekvensbreddningen kan hållas nere. Kretsar med långa och smala shuntledningar tillåter en serie av övergångar att dc-mässigt parallellkopplas medan de rf-mässigt är seriekopplade. En frekvensgenerator baserad på stående solitorvågor tycks vara en annan möjlighet att få höga effekter.

Josephsoneffekten ger ett samband mellan spänning och frekvens vilket kan användas för att mäta spänning i frekvensenheter. Det är mycket enklare att realisera en känd frekvens än en spänning. Vi har redan berört metoden med supraledande lik- och växelströmskretsar vilka ger upphov till strömsteg i I-V-karakteristiken för övergångar. Flera stora nationer har helt gått över till att hålla en spänningsnormal med hjälp av Josephsoneffekten. Därigenom kan man minska osäkerheten i voltstandarden upp emot två tiopotenser (till ca $1:10^6$).



Figur 1 Principschema för en spänningsstandard. Ett Josephsonelement som bestrålas med mikrovågor, uppvisar steg i ström-spänningskurvan. Strömstegen är åtskilda av en väldefinierad spänning, $\Delta V = (h/2e)$ -frekvensen hos mikrovågorna. Används ett accepterat värde hos naturkonstanten h/c , kan spänningen över ett stort antal steg relateras till mikrovågsfrekvensen, vilken lätt kan bestämmas med mycket hög noggrannhet.

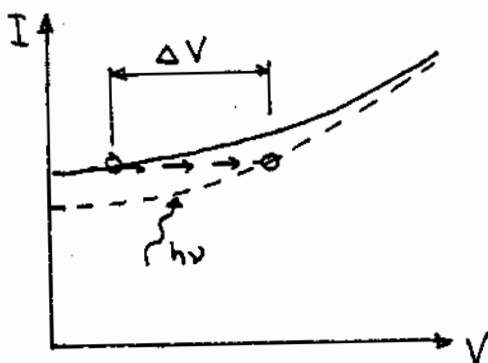


Figur 2 Två Josephson-baserade spänningsnormaler hopkopplade för jämförelse, nämligen den transportabla normalen från BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) och den hos NPL (National Physical Laboratory). Kopplingscheman ges endast i stora drag.

Detektorer kan vara av videotyp, dvs. känsliga för fotoner oberoende av frekvens, eller heterodyndetektorer vilka bevarar frekvensinformationen. Supraledande tunneleffekter har tagits i anspråk för detektorer av båda sorterna. Såväl Josephsoneffekten som singulariteten i kvasipartikelströmmen vid gapspänningen har använts. Här behandlar vi kortfattat bägge typerna av effekter och börjar med Josephsonbaserade detektorer.

XII.33.a. Videodetektorer.

Josephsonströmmen påverkas av strålning (se XII.19.b.). Kritiska strömmar hos en resistivt shuntad övergång trycks ned av infallande fotoner.



$\Delta V \sim$ effekten hos strålningen

Detektorns känslighet karakteriseras av dess "noise-equivalent power". $NEP \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ W/Hz}^{-1/2}$ vid 100 GHz har rapporterats för Nb punktkontakter. Videodetektorn ger utslag för en signal inom ett brett frekvensintervall. Oftast vill man veta såväl amplitud som frekvens hos den okända signalen. Första steget i en frekvenskänslig detektor kan bestå av en blandare eller av en förstärkare.

XII.33.b. Josephsonblandare.

Det icke-linjära ström-spänningsberoendet hos ett Josephsonelement kan nyttjas i en högfrequensblandare. Applicerar vi både en stark laboratoriesignal (lokaloscillator) och en svag, okänd signal, kommer vi få en mångfald frekvenskomponenter. Av speciellt intresse är komponenten vid låg frekvens (intermediära frekvensen $f_{if} = |f_s - nf_{LO}|$) vilken kan förstärkas med konventionella lågbrusiga förstärkare och studeras i detalj. Internt pumpade Josephsonblandare är av mindre intresse, eftersom Josephsonfrekvensen vid en likspänning över elementet är bred; lokaloscillatorn blir dåligt definierad.

Blandarens viktigaste prestanda utgör dess konversionsfaktor, L^{-1} , vilken bestämmer hur stor del av högfrequenseffekten som konverteras till lågfrekvens, samt, naturligtvis, dess brus-temperatur ($T_{system} = T_{blandare} + LT_{if\text{-förstärkare}}^{brus}$).

Josephsonblandare har i allmänhet god konversion, rentav förstärkning, men brustemperaturerna är måttligt bra, typiskt ca 100 K vid 100 GHz.

XII.33.c. Parametriska förstärkare.

Man kan få förstärkning av en svag signal i ett pumpat element, som har en spänningsberoende reaktans. I t.ex. varaktordioder är kapacitansen spänningsberoende. En Josephsonövergång kan beskrivas med en mycket icke-linjär induktans vilket behandlades i XII.26. Detta innebär att man kan få parametrisk förstärkning i Josephsonövergångar.

Experiment har utförts med både externt och internt pumpade Josephsonförstärkare; flest med extern pumpning. Antingen kan den externt pumpade förstärkaren drivas i en symmetrisk s.k. 4-foton-mod (där $f_s \approx f_{LO}$) utan pålagd likström eller i en osymmetrisk 3-foton-mod ($f_s \approx \frac{1}{2}f_{LO}$) med en likström (I_0) genom tunnelementet. Hög förstärkning har noterats, men oftast uppträder (liksom för Josephsonblandare) ett icke helt förstätt egengenererat brus ("noise-rise") samtidigt med förstärkningen. Självpumpade förstärkare har prövats

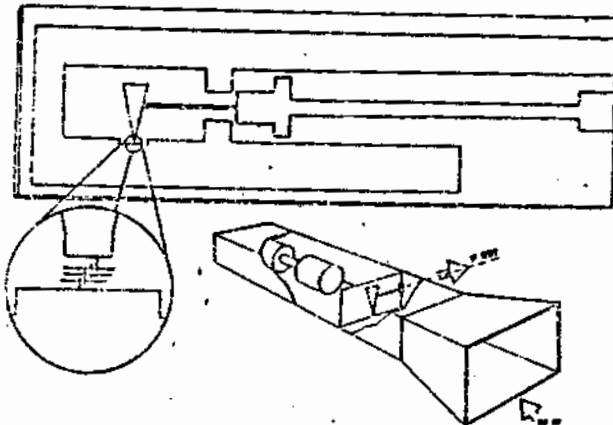
sparsamt hittills. Försök vid 10 GHz gav lovande resultat med en brustemperatur lägre än ca 30 K vid måttlig förstärkning.

XII.33.d. Kvasipartikelblandare.

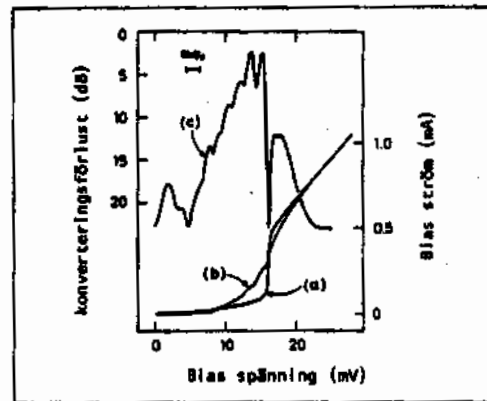
Man kan också använda sig av strömsingulariteten vid gapspänningen i en tunnelövergång. Tunnelkurvan, med mycket liten ström under gapspänningen och en stor ström däröver, liknar karakteristiken för en ideal switch. Således bör en tunnelövergång kunna nyttjas i en blandare. Och så är fallet. Brustemperaturen hos blandarelementet är så låg den nämligen kan bli, nära kvantgränsen hf_s/k_B . Betraktar vi den andra viktiga egenskapen, konversionen, hos en blandare möter vi en positiv överraskning.

Hos en klassisk blandare väntar vi oss en konversion (SSB, single side band) av maximalt 50%. Dock visar teoretiska betraktelser, likväl som experimentella resultat, att kvasipartikelblandare kan ha en konversion större än 0.5, ja rentav förstärkning, i vissa fall en stor förstärkning. Detta händer i kvantgränsen, då $hf_s >$ breddningen av tunnelströmkurvan vid energigapet. Foton-stimulerad tunneling ger konduktansbidrag, som ger upphov till hög konversion av effekt från hög till låg frekvens.

Seriekopplade tunnelövergångar har visat sig ha många fördelar jämfört med enskilda, små tunnelövergångar (dimensioner av storleksordningen μm erfordras för att hålla kapacitansen låg).



An array of 6 tunnel junctions is coupled to the electro-magnetic field via an antenna as shown in the inset. The back-short optimizes the coupling. The rf is coupled out of the array, and the dc bias into it, via a microstrip low-pass filter. The tunnel junctions are about $5 \mu\text{m} \times 5 \mu\text{m}$. Their Josephson critical current densities are typically of the order of 10^3 A/cm^2 .



I (a) ges ström-spänningskurvan för 6 seriekopplade supraledande (Pb) tunnelövergångar. Då dessa utsätts för millimeter vågor (75GHz) fås steg i I-V-karakteristiken, vilket visas i (b). Låter man dessutom en svag signal (som man vill detektera och som också har $f \approx 75 \text{ GHz}$) falla in mot systemet fås en blandning av de två frekvenserna. En lågfrekvent skillnadsfrekvens kan förstärkas i efterföljande lågfrekvensförstärkare och studeras i detalj. Konverterings effektiviteten (utgående mellanfrekvens effekten dividerad med ingående signaleffekten) ges som en funktion av spänningen över elementen i (c). Den lägsta förlusten är 2,2 dB, vilket är 0,8 dB lägre än vad man skulle vänta sig i ett element utan egen förstärkning. Blandarens brustemperatur är låg, ca 10 K.

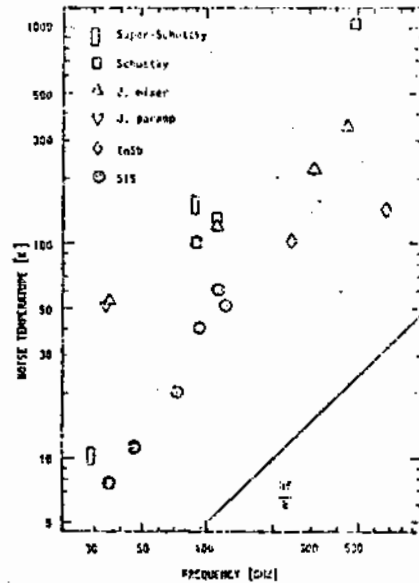
Kvasipartikelblandaren (eller S-I-S-blandaren) är den supraledande tillämpning på högfrekvenssidan som idag anses ha störst potential. Ett betydelsefullt användningsområde är inom radioastronomi, där man har ett stort behov av känsligare detektorer vid frekvenser större än ca 40 GHz, vilket är den praktiska gränsen för maser-förstärkare.

XII.33.e. Summering av prestanda för högfrekvensdetektorer.

Prestanda för olika detektorelement byggande på supraledande tunnelövergångar framgår av följande tabell

Examples of quasiparticle (SIS) and Josephson junction results.

VIDEO DETECTORS:		f	NEP
		[GHz]	[W/Hz ^{1/2}]
SIS		36	$2.6 \cdot 10^{-16}$
		70	$1.7 \cdot 10^{-15}$
MIXERS:		L_C	T_{MIX}^{SSP}
		[dB]	[K]
SIS		35-230	-4.3-+7
Josephson		230	300
PARAMETRIC AMPL:		Gain	T_N
		[dB]	[K]
Internally pumped, Joseph.		10	5
Externally pumped } 3 photon		35	4-12
Josephson } 4 photon		10	20



Mer information rörande tunneldetektorer ges i utdelad uppsats, som ger detaljer främst om kvasipartikelblandare och självpumpade parametriska förstärkare. För övrigt hänvisas till bibliografin för ytterligare referenser.

XII.34. Bibliografi.

Josephsons ursprungliga uppsats på 2 sidor ger grunderna till större delen av det behandlade stoffet i detta kapitel: B.D. Josephson, Phys. Letters 1, 251 (1962).

Tre kapitel: D.J. Scalapino, "The Theory of Josephson Tunneling", J.E. Mercereau "DC Josephson Effect" samt D.N. Langenberg, "AC Josephson Tunneling-Experiment" ingår i "Tunneling Phenomena in Solids" (E. Burstein, & S. Lundqvist, eds.) Plenum Press, N.Y. 1969.

Översikt av Josephsoneffekterna ges också av L. Solymar, "Superconductive Tunneling and Applications", Chapman and Hall, London, 1972. T. van Duzer resp. A. Barone har nyligen författat böcker som täcker Josephsoneffekterna.

Dessutom rekommenderas flera artiklar av olika författare i "Superconductor Applications: SQUIDS and Machines" (B.B. Schwartz, & S. Foner, eds.), Plenum Press, N.Y. 1977.

Praktiska tillämpningar beskrivs i flera uppsatser i "Special Issue on Josephson-Junction Devices", IEEE Trans. on Electron Devices, ED-27, No. 10 (1980).

IBMs utveckling av supraledande datorer behandlas i flera artiklar i ett temanummer "Josephson Computer Technology", IBM J. Res. Develop. 24, No. 2 (1980).

Sommarskoleföredrag sammanfattas i "Josephson Computer Technology" av H.N. Zappe och "Superconducting Tunnel Junctions in High Frequency Radiation Detectors" av T. Claeson i NATO Advanced Study Institute Series (J. Ruvalds, ed.), Plenum Press (1983).

Rf-SQUID-en beskrivs ingående i den bok av Lounasmaa, som refererats till i teknikdelen av denna kurs, O.V. Lounasmaa, "Experimental Principles and Methods Below 1 K", Academic Press, London, 1979.

Bland konferenser, som innehåller många rapporter, kan nämnas Applied Superconductivity Conference vars konferensrapport brukar återfinnas som det första numret av IEEE Transactions on Magnetics, varje udda år. Nämnas bör också de SQUID-konferenser som hållits. Artiklar i "SQUID resp. SQUID'80, Superconducting Quantum Interference Devices and their Applications" (H.D. Hahlbohm & H. Lübbig, eds.), W. de Gruyter, Berlin 77 resp. 80.