III ELEKTROMAGNETISK RESPONS

I detta kapitel behandlar vi supraledare i elektromagnetiska fält, främst teoretiska beskrivningar fram till 1950-talet. Vi har redan berört en del av egenskaperna. Här börjar vi med att betrakta en supraledare som en perfekt ledare och visar, att kriteriet ej är tillräckligt för att få t.ex. Meissner-effekt. Bröderna London utvecklade teorin, vilken då gav flödesutträngning, penetrationsdjup och kvantiserat flöde i en supraledande ring. För att motivera teorin behövs en stel vågfunktion för korrelerade elektroner samt ett lokalt samband mellan fält och ström i en supraledare. Pippard införde en modifikation - ett icke - lokalt samband inom ett koherensområde. Lustigt nog visar det sig att Londons teori, den första approximationen, gäller hyggligt för orena metaller, legeringar, medan de rena metallerna kräver icke - lokala samband. Vi återkommer till den problemställningen i samband med Ginzburg-Landaus teori.

III.1. Perfekt ledare

Om superelektronerna ej möter motstånd så fås att de accelererar i ett elektriskt fält, som på något sätt trycks på över materialet.

$$m\dot{v}_s = qE$$

där m och q är laddningsbärarens (elektronens) massa och laddning. Med n_s superelektroner per volymenhet fås strömstätheten

$$J_s = n_s q v_s \text{ , varför}$$

$$\dot{J}_s = (n_s q^2/m)\, E$$

För att få ett samband för magnetiska fältkomponenten, så används Maxwells relationer:

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\dot{B} = -\nabla \times E$$

$$\nabla \times H = J + \dot{D} \approx J \quad \text{(om fälten ej varierar allför snabbt med tiden)}$$

Genom att substituera $\dot{J}_s$ för E och B för J_s fås :

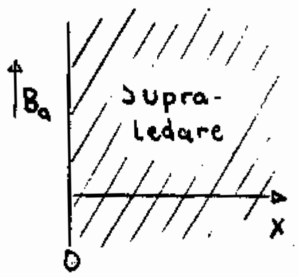
$$\dot{B} = -\nabla \times E = -(m/n_s q^2)\, \nabla \times \dot{J}_s = -(m/n_s q^2) \nabla\times\nabla\times\dot{B}/\mu_0$$

Eftersom $\nabla\times\nabla\times\dot{B} = \nabla(\nabla\cdot\dot{B}) - \nabla^2\dot{B} = -\nabla^2\dot{B}$:

$$\dot{B} = \lambda_L^2\, \nabla^2 \dot{B}, \text{ där } \lambda_L^2 = m/\mu_0 n_s q^2$$

$$\nabla^2 \dot{B} = (1/\lambda_L^2)\, \dot{B}$$

Med en plan gränsyta till en supraledare (uppfyllande rymden x>0) och ett magnetiskt fält parallellt med ytan fås



$$\frac{d^2\dot{B}}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_L^2}\,\dot{B}$$

$$\dot{B} = \dot{B}_a\, e^{-x/\lambda_L}$$

$\dot{B}$ avtar exponentiellt med avståndet från ytan. Eller med andra ord: väl inne i supraledaren har flödestätheten ett konstant värde oberoende av vad som händer vid ytan. Men vi har redan konstaterat, att detta strider både mot vad som observeras experimentellt (Meissner-effekten) och mot termodynamiska förväntningar. (Teorin för en perfekt ledare utarbetades av Becker strax innan upptäckten av Meissnereffekten).

III.2 Londons teori

Bröderna F och H London föreslog (1935), att det magnetiska beteendet hos en supraledare ges av ekvationerna i föregående stycke. om man ersätter $\dot{B}$ med B.

$$\nabla^2 B = (1/\lambda_L^2)\, B$$

eller

$$B = B_a\, e^{-x/\lambda_L}$$

Det magnetiska fältet avtar exponentiellt med avstånd räknat i Londons penetrationsdjup.

Londons ekvationer brukar tecknas

$$\nabla \times J_s = -(1/\lambda_L^2\, \mu_0)\, B$$

$$\dot{J}_s = (1/\lambda_L^2\, \mu_0)\, E$$

Med en vektorpotential ($B = \nabla \times A$) och rätt "gauge" ($\nabla \cdot A = 0$)

$$J_s(\,r\,) = -(1/\lambda_L^2\, \mu_0)\quad A\,(\,r\,)$$

d v s ett lokalt samband mellan J och A.

Bröderna London kunde motivera sin teori med att vågfunktionen, som beskriver de supraledande elektronerna är stel, d.v.s. ej påverkas av magnetiska fält. Här skisserar vi betraktelsesättet.

I ett system av N partiklar, beskrivet av vågfunktionen $\Psi\,(r_1, r_2, \ldots r_N)$

fås strömtätheten i en punkt R i närvaron av ett magnetiskt fält $B\,(r_\alpha) = \nabla \times A\,(r_\alpha)$:

$$J\,(R) = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_1 \ldots \int_N \Psi^*\,(q v_{op})\,\psi\,\,\delta(R - r_\alpha)\,dr_1 \ldots dr_N$$

Eftersom kinetiska impulsen $mv = p - qA$ för en laddad partikel i en vektorpotential, och

$$p_{op} = \frac{\hbar}{i}\,\nabla$$

fås

$$J\,(R) = \sum_{\alpha=1}^{N} \int \delta\,(R - r_\alpha)\,dr_1 \cdots dr_N\,\left\{ \frac{q}{2mi}\,(\psi^*\,\nabla_\alpha \psi - \psi \nabla_\alpha \psi^*) - \frac{q^2}{m}\,A\,(r_\alpha)\,\psi^* \psi \right\}$$

I en normal metall är de två termerna i integralen nästan lika stora, varför endast ett litet bidrag (Londons diamagnetism) blir kvar. Om man däremot antar, att vågfunktionen är stel i en supraledare, $\nabla\psi = 0$, , så försvinner den första termen och kvar blir det stora diamagnetiska bidraget

$$J\,(R) = -\,\frac{q^2 N}{m}\,A\,(R)$$

vilket ju är Londons ekvation.

En indikation av stelheten ligger i själva de ekvationer vi studerat

$$p_s = m\,v_s + q\,A = q\,\{\,(m/n_s q^2)\,J_s + A\} = 0$$

Ett antal elektroner kondenserar till ett lägsta impulstillstånd $p_s = 0$. Osäkerhetsrelationen ger en oändlig utsträckning av motsvarande vågfunktioner. Dessa bör således ej påverkas av lokala fältvariationer, de är stela.

III.3 Kvantiserat flöde

Betrakta en sluten krets av supraledare, t.ex. en supraledare med ett hål i eller med en normal inneslutning. Vågfunktionen

$$\psi = \psi_0\, e^{(i/\hbar)\,(p\cdot r\, -\, Et)}$$ för

superelektronerna (kondensatet) måste bli densamma om vi går runt ett varv i supraledaren och kommer tillbaka till samma punkt Q. Vågfunktionens fas kan endast ha ändrats en multipel av 2π.

$$\oint \frac{p_s}{\hbar}\, dr = 2\pi n$$

$$\oint (mv_s + q\,A)\cdot dr = \oint \{(m/n_s q)J_s + q\,A)\cdot dr = nh$$

Väljs integrationsvägen på ett avstånd avsevärt större än λ_L från ytan så är $J_s = 0$. Således

$$\oint A\cdot dr = \int_S (\nabla \times A)\,dS = \Phi = nh/q = n\Phi_0$$

F. London pekade på flödeskvantiseringen i en fotnot i sin bok rörande " Superfluids Vol.1". Det dröjde till 1961 då Doll och Näbauer samt Deaver och Fairbank oberoende av varandra kunde rapportera mätningar av det kvantiserade flödet. De mätte det magnetiska momentet hos en ihålig cylinder (med λ_L <<väggtjockleken << radien) som kyldes under T_c i ett svagt magnetiskt fält. Det magnetiska flödet, som fångades in i cylindern, visades vara en multipel av Φ_0. I överensstämmelse med vad man skulle vänta sig från BCS-teorin, visade det sig, att $|q| = 2e$. D.v.s.

$$\Phi_0 = h/2e \simeq 2.07\cdot 10^{-15}\ \text{Wb}\quad (\text{Vs})$$

Lägg märke till att det egentligen ej är flödet, som är kvantiserat, utan runtomintegralen av en term proportionell mot strömmen plus en mot vektorpotentialen. Denna storhet brukar benämnas en fluxoid. För vår cylinder är styrkan av det magnetiska fältet i allmänhet ej sådant, att det inneslutna flödet blir exakt en multipel av en fluxon, $n\Phi_0$. Det kommer att flyta cirkulerande strömmar vid cylinderns yta så att totala flödet inuti supraledaren motsvarar ett jämnt antal fluxoner. T.ex. om det pålagda fältet motsvarar $(n + 1/4)\Phi_0$ så induceras en ström så att totala flödet blir $n\Phi_0$. Skulle det ursprungliga flödet däremot vara t.ex $(n+3/4)\,\Phi_0$, så induceras en ström i motsatt riktning, så att totala inneslutna flödet blir $(n+1)\Phi_0$.

III.4. Koherenslängd

Pippard införde 1953 ett viktigt koncept, koherenslängd. (Vi skall senare se, att koherenslängden motsvarar utsträckningen av ett elektronpar). Mätningen på supraledare hade bekräftat, att magnetiska fält tränger in ett avstånd motsvarande Londons penetrationsdjup, λ_L.

Dock visade dels mätningar av magnetiseringen hos små (kolloida) partiklar och tunna filmer och dels resonansfrekvensskift hos supraledande kaviteter (frekvensen beror på inträngningsdjupet hos det högfrekventa fältet, effekten är liten, men det höga Q-värdet gör att förändringen på grund av supraledning är mätbar) att penetrationsdjupet var avsevärt större än det värde man beräknade för λ_L med resonabla värden på n_s.

Vi har tidigare diskuterat graden av supraledande ordning i form av tätheten av supraelektroner, n_s. Pippard drog slutsatsen, att n_s varierar långsamt i en supraledare, typiskt över ett område av storleksordningen 1µm i en ren supraledare. Avståndet kallas för koherenslängd, ξ.

I en ren supraledare, där fria medelväglängden ℓ är lång, så gäller ej Londons lokala samband mellan ström och fält. På samma sätt som man har ett icke-lokalt samband mellan ström och orsakande fält (inom ℓ) i en normal metall (Chambers relation), så fås ett icke-lokalt samband mellan ström och fält i en supraledare. Variationer i fältet inom koherensområdet måste beaktas.

(Pippards teori ger

$$J_s(r) = - \frac{3}{4\pi\xi\lambda_L^2\,\mu_0} \int \frac{(r-r')\,\{(r-r')\cdot A(r')\}e^{-|r-r'|/\xi}}{|r-r'|^4}\, d^3r')$$

Att vi verkligen har en stor koherenslängd indikeras av den skarpa övergången mellan de resistiva och supraledande tillstånden vid T_c. I en ren metall kan övergången ske inom 10^{-5}K. Detta tyder på att ett stort antal elektroner deltar koherent i fasövergången för att motverka fluktuationer. En annan länk i indiciekedjan är den relativt stora ytenergi, som uppträder i regionen mellan supraledande och normala domäner i starka magnetiska fält och till vilken vi återvänder senare. Denna ytenergi är av storleksordningen (koherenslängden) x $B_c^2/2\mu_0$ i en ren supraledare. Vi kan uppskatta ξ genom ett enkelt resonemang nyttjande osäkerhetsrelationen eller från BCS-teorin. Detta återkommer vi till senare.

Koherenslängden är av storleksordningen en mikrometer i en ren supraledare. Den är materialberoende, vilket visas i tabell III.1. Största värden fås i supraledare med låga Tc.

Koherenslängden är beroende av fria medelväglängden (för normala elektroner). För små föroreningshalter, d.v.s. där ℓ fortfarande är relativt stor, fås :

$$1/\xi \simeq 1/\xi_0 + 1/\ell$$

där ξ_0 är koherenslängden hos det rena materialet.

I mycket oordnade metaller fås

$$\xi \simeq \sqrt{\xi_0 \ell}$$

I t.ex. en amorf metall är ℓ av storleksordningen 1A. Detta innebär, att $\xi \simeq$ 100A i detta extrema fall.

Tabell III.I. Koherenslängden (väl under T_c) för några rena metaller (beräknade värdenfrån BCS-teorin; de är i hyggligt god överensstämmelse med experiment .).

	Al	Sn	Pb	Nb
ξ_0 { nm }	1600	230	83	38

Pippards antagande leder till att i stället för sambandet givet av Londons teori ($\mu_0\lambda_L J + A = 0$) skulle man få

$$\mu_0\lambda_L^2 J + (\xi/\xi_0)A = 0$$

eller

$$\mu_0\lambda^2 J + A = 0,$$

där

$\lambda/\lambda_L = (\xi_0/\xi)^{1/2}$ dvs ett effektivt $\lambda > \lambda_L$ då $\xi < \xi_0$.

Detta resonemang gäller då vi fortfarande har en lokal ekvation, som är giltig då A varierar långsamt över avståndet ξ, d.v.s. då $\xi \ll \lambda$ (s.k. London-gränsen). I motsatta gränsen, då $\lambda \ll \xi_0$ (Pippard-gränsen) får vi anta, att det relevanta värdet på A är det genomsnittliga över en volym begränsad av λ i ena riktningen och ξ_0 i de två andra. A reduceras då med en faktor λ/ξ. och :

$$\mu_0\lambda_L^2 J + (\lambda/\xi_0)A = 0$$

d.v.s.

$\lambda/\lambda_L = (\xi_0/\lambda_L)^{1/3}$ och således även här $\lambda > \lambda_L$.

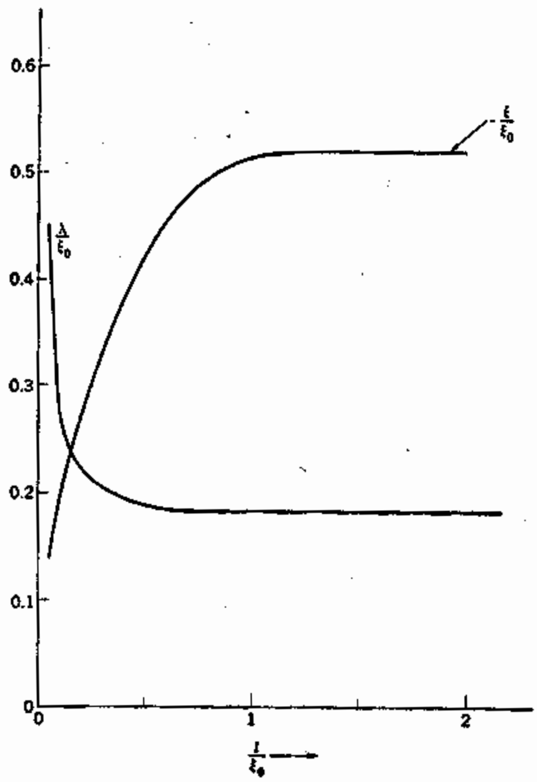


Fig.III.1. *Beroendet av fria våglängden hos penetrationsdjup och koherenslängd. Beräkningarna har utförts för* $\xi_0 = 10\ \lambda_L$.

III.5. Sammanfattning av elektromagnetisk respons.

Egenskaperna hos en perfekt ledare med resistiviteten noll räcker ej för att beskriva en supraledares egenskaper. Det är magnetiska flödestätheten och ej förändringarna av denna som försvinner väl inne i supraledaren.

Londons teori ger tillsammans med tvåvätskemodellen

$$J = J_s + J_n$$

$$J_n = \sigma_n' E$$

$$dJ_s/dt = (n_s q^2/m)E$$

$$\nabla \times J_s + (n_s q^2/m)B = 0$$

Den sista ekvationen kan också skrivas

$$J_s(r) = -\left(1/\mu_0 \lambda_L^2\right) A(r)$$

vilket är ett lokalt samband mellan J_s och A.

Londons teori gäller då ℓ är liten (vilken den är för typ II supraledare). För rena, typ I, supraledare, däremot, måste vi ansätta ett icke-lokalt samband. Pippard införde det viktiga begreppet koherenslängd, en storhet som beror på fria medelväglängden i metallen. För rena metaller är ξ_0 av storleksordningen upp emot tio tusen atomavstånd, vilket innebär, att antalet korrelerade superelektroner är mycket stort. I motsats till λ minskar ξ med minskande ℓ, varför man kan få $\xi \gtrless \lambda$ beroende på legeringshalt.

ξ och λ har liknande temperaturberoende, bägge ökar kraftigt, då temperaturen närmar sig T_c. Vi återkommer till funktionssambanden när vi behandlar Ginzburg-Landaus teori.

Flödet i ett supraledande hålrum är kvantiserat i $\Phi_0 = h/2e$. Vi skall strax se, att i typ II supraledare tränger flöde genom supraledaren i normala områden av utsträckningen ξ - varje område innehåller ett flödeskvantum.