

V. GINZBURG-LANDAU TEORI

Ginzburg och Landau presenterade 1950 en fenomenologisk teori, som är väl ägnad åt att beskriva inhomogeniteter av den typ som existerar t ex i typ II supraledare mellan supraledande och normala regioner. Teorin är en utvidgning av Landaus teori men med hänsyn till att tätheten av superelektroner varierar i rummet. Abrikosov använde modellen och visade hur supraledning nukleeras vid H_{c2} och hur tillståndet av virvlar är beskaffat. Modellen fick kanske sitt ordentliga genomslag då Gorkov (1959) visade att den kunde härledas ur den då nyligen utvecklade BCS-modellen. GL-teorin kallas ibland också GLAG (Ginzburg, Landau, Abrikosov, Gorkov).

Ginzburg och Landau introducerade en i rummet varierande pseudo-vågfunktion $\psi(x)$, en komplex ordningsparameter. $|\psi(x)|^2$ motsvarar den lokala tätheten av superelektroner, $n_s(x)$.

Den teoretiska gången är den följande: Man antar att ordningsparametern är liten (vilken den t ex är nära T_c) och att fria energin hos supraledaren kan utvecklas som en potensserie i ordningsparametern. Varierar nu $\psi(x)$ i rummet så måste man ta hänsyn till en kinetisk energi, vilken kan uttryckas som en serie av termer med gradienten av vågfunktionen i kvadrat. Denna energi påverkas av elektromagnetiska fält och dessutom ger det senare upphov till en fältenergi. Varierar vi nu de ingående variablerna - vågfunktionen och fältet - för att få minimal energi så kommer de s k Ginzburg-Landaus ekvationer att framträda. Ur dessa ekvationer kan vi få fram koncept som penetrationsdjup, koherenslängd, ytenergi, flödesstruktur, H_{c2} , nukleering av supraledning vid ytan och andra egenskaper där variationer av superelektronernas täthet är betydelsefulla.

Teorin bygger på den allmänna behandlingen av andra ordningens fasövergångar som Landau utarbetat (se Landau och Lifshitz. "Statistical Physics, Vol. 5", i deras serie "Theoretical Physics"). Parametern $\psi(x)$ beskriver graden av ordning i supraledaren. Den är noll i ett normalt område och ett i ett helt supraledande. $n_s(x) = \psi^*(x)\psi(x)$. För vår behandling antar vi att $\psi(x)$ är liten (även om man har visat att GL's ekvationer är giltiga även för $T \ll T_c$).

(a) Först antar vi att $\psi(x)$ ej varierar i rummet och att inga fält applicerats. Då har vi en Taylorutveckling för fria energin $G_s(\psi, T, B) = \int d^3x \{g_s\}$, där

$$g_s = g_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \dots$$

Man kan argumentera att udda potenser av ψ eller $|\psi|$ skall försvinna (imaginär energi och icke-analytisk funktion vid $\psi = 0$). För små ψ är det tillräckligt att behålla enbart de första två termerna i utvecklingen.

Om både α och β är positiva, kommer G_s att vara minimal för $|\psi| = 0$, dvs supraledning uppträder ej. Vi behöver ett $\alpha > 0$ för $T > T_c$ och $\alpha < 0$ för $T < T_c$. Ett rätt val är $\alpha = \alpha_0(T - T_c)$.

Koefficienten β måste vara positiv för att det supraledande tillståndet skall vara stabilt, se figur V.1. Det är tillräckligt att betrakta β som oberoende av T .

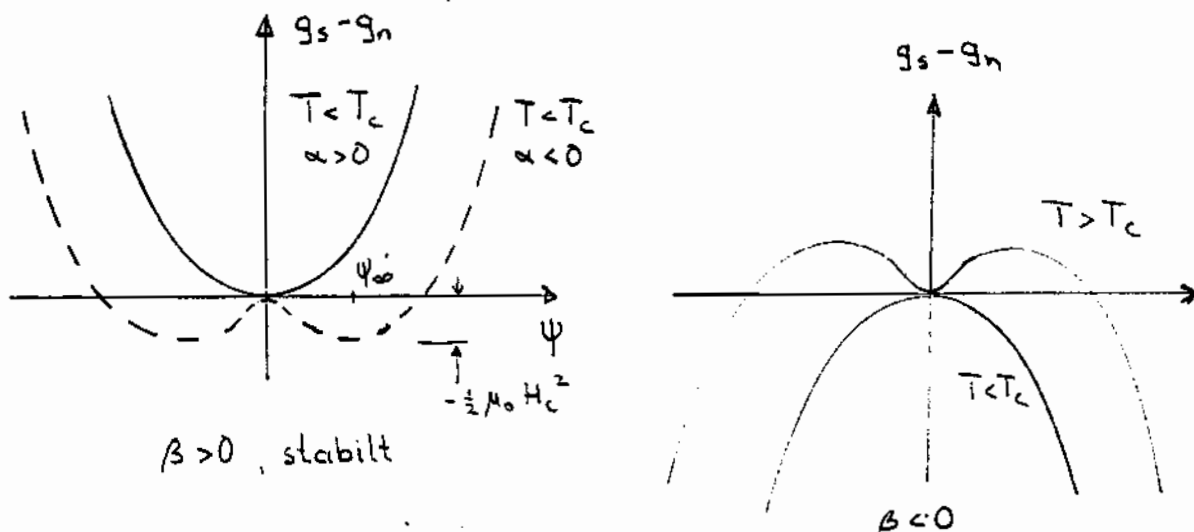


Fig. V.1

För att finna jämviktsvärdet på ψ (under våra speciella förutsättningar) minimerar vi G_S med avseende på $|\psi|$:

$$\frac{\partial G_S}{\partial |\psi|} = 2\alpha|\psi| + 2\beta|\psi|^3 = 0$$

Lösningen $|\psi| = 0$ (för $\alpha, \beta > 0$) ger normala tillståndet och $|\psi|^2 = -(\alpha/\beta) = |\psi_\infty|^2$

är jämviktstätheten av superelektroner för svaga fält och strömmar. ψ_∞ är det värde som ψ går mot oändligt djupt inne i supralederen där all inverkan av ytströmmar och fält är skärmade. Med detta värde på ordningsparametern fås

$$g_S - g_n = -\alpha^2/2\beta = -\frac{1}{2} \mu_0 H_C^2$$

där vi utnyttjat tidigare termodynamisk kunskap för den sista likheten.

I Londonsteori hade vi att $\lambda^2(T) \sim 1/n_S(T)$. Således kan vi få ett andra samband mellan α och β :

$$\frac{\lambda^2(0)}{\lambda^2(T)} = \frac{n_S(T)}{n_S(0)} = \frac{|\psi_\infty(T)|^2}{|\psi_\infty(0)|^2} = |\psi_\infty(T)|^2 = -\frac{\alpha(T)}{\beta(T)}$$

Ur dessa två samband kan vi uttrycka $\alpha(T)$ och $\beta(T)$ i experimentellt mätbara storheter:

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= -\mu_0 H_C^2(T) \lambda^2(T)/\lambda^2(0) \\ \beta(T) &= \mu_0 H_C^2(T) \lambda^4(T)/\lambda^4(0) \end{aligned}$$

(Vi ser att om vi använder de approximativa temperaturberoenden, som observerats experimentellt, $H_C \sim T_C - T$ nära T_C och

$$\lambda^2(T) \sim 1/(1-(T/T_C)^4) \sim \{(1+(T/T_C)^2)(1+T/T_C)(1-T/T_C)\}^{-1} \sim (1-T/T_C)^{-1}$$

så får vi $\alpha(T) \sim T_C - T$ och β oberoende av T nära T_C).

- (b) Nu låter vi $\psi(r)$ variera långsamt i rummet. Då måste vi addera extra termer till fria energin i vilka gradienten av ψ ingår. Dessa kommer dels från den kinetiska energin från extra krökningar i den mångkropparvågfunktion som beskriver n_S samt dels en växelverkansenergi pga att tätheten av superelektroner varierar runt om punkten i frågan. Om $|\psi|^2$ varierar långsamt så är det tillräckligt att behålla den ledande termen i utvecklingen av $|\nabla\psi|^2$. Det lokala bidraget blir

$$\frac{1}{2m^*} |\nabla\psi|^2$$

(vi kan göra det plausibelt att detta ger ett rörelseenergibidrag, då ψ kan skrivas

$$\psi_0 e^{i(p \cdot r - Et)} \quad \text{vilket således ger } p_S^2/2m^*.)$$

Vi har introducerat massan m^* istället för m för superelektronerna. Vi skall senare se att $m^* = 2m_e$. Likadant har vi $e^* = 2e$ för elektronparen och $n_S^* = n/2$.

- (c) Nu betraktar vi också bidraget från fält. Detta beskrivs av vektorpotentialen $A(r)$. Vi får två bidrag, dels en renormalisation av vår kinetiska energi (har att göra med sk "gauge invariance") och dels själva fältenergin.

Vi vet att rörelseimpulsen $m^*v = p \leftrightarrow (\hbar/i)\nabla$ för laddade partiklar ($-e^*$) i en vektorpotential måste kompletteras med en elektromagnetisk impuls

$$(\hbar/i)\nabla \rightarrow (\hbar/i)\nabla - e^* A$$

Energibidraget pga variation av vågfunktion och fält blir

$$(1/2m^*)|(\hbar/i)\nabla - e^*A|\psi|^2 + (1/2 \mu_0)B^2$$

Totalt får vi således för fria energin:

$$G_S = G_n + \int d^3r \{ \alpha |\psi|^2 + (\beta/2) |\psi|^4 + (1/2m^*) |(-i\hbar\nabla - e^*A)\psi|^2 + (1/2 \mu_0) (\nabla \times A)^2 \}$$

V.1. Ginzburg-Landau ekvationer

Vi kan få de differentialekvationer, som styr supraledaren i GL-teorin, genom ett variationsförfarande. Här får vi betrakta variationer map ψ^* , ψ och A . Betrakta först variation map ψ^*

$$0 = \delta G_S = \int d^3r \delta g_S = \int d^3r \{ \alpha \psi \delta \psi^* + \beta |\psi|^2 \psi \delta \psi^* + (1/2m^*) (-i\hbar\nabla - e^*A)\psi (i\hbar\nabla - e^*A) \delta \psi^* \}$$

Partiell integrering ger

$$0 = \delta G_S = \int d^3r \delta \psi^* \{ \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + (1/2m^*) (-i\hbar\nabla - e^*A)^2 \psi \}$$

(om vi försummar en ytterterm, vilket ger randvillkoret $(-i\hbar\nabla - e^*A)|\psi = 0$, dvs $J_{\perp} = 0$ i gränssytan. de Gennes har visat att för metall-supraledargränssytan blir villkoret $(-i\hbar\nabla - e^*A)|\psi = i\psi/b$ där $\hbar b$ är den sk extrapolationslängden, vilken är materialberoende, t ex går den mot oändligheten för en isolator och mot noll för en magnetisk metall.)

För att δG_S skall vara noll för godtyckligt $\delta \psi^*$ fordras

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + (1/2m^*) (-i\hbar\nabla - e^*A)^2 \psi = 0$$

Detta är den första GL-ekvationen. Variation av δG_S map ψ leder till komplexkonjugering. Variation map A ger den andra GL-ekvationen:

$$\delta G_S = 0 = \int d^3r \delta A \cdot \{ \nabla \times H - (e^*/2m^*) [\psi^* (-i\hbar\nabla - e^*A)\psi + \psi (i\hbar\nabla - e^*A)\psi^*] \}$$

där vi använt $\delta (\nabla \times A)^2 = 2(\nabla \times A) \cdot \nabla \times \delta A = 2\delta A \cdot \nabla \times \mu_0 H$

således

$$\vec{j} = \nabla \times H = \frac{e^* \hbar}{2m^* i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{(e^*)^2}{m^*} \psi^* \psi A$$

(den sista ekvationen kan även skrivas

$$j = (e^*/m^*)|\psi|^2 (\hbar \nabla \phi - e^* A) = e^* |\psi|^2 v_s$$

där vi använt att $\psi = \psi_0 e^{i\phi}$.

Sammanfattningsvis har vi Ginzburg-Landaus ekvationer:

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + (1/2m^*) (-i\hbar \nabla - e^* A)^2 \psi = 0$$

$$j = (e^* \hbar / 2m^*) (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - ((e^*)^2 / m^*) \psi^* \psi A$$

Den första ekvationen liknar Schrödingerekvationen i kvantmekaniken för partiklar med massa m^* , laddning e^* och energiegenvärde $-\alpha$. Dock finns det också en icke-linjär ($|\psi|^2 \psi$) term. Denna fungerar som en repulsiv potential beroende på ψ växelverkande på sig självt - den föredrar vågfunktioner $\psi(r)$ som varierar långsamt i rummet. Den andra ekvationen är densamma, som vi funnit tidigare. Emellertid är den ej oberoende utan i GL-teorin kopplad till den första ekvationen. $|\psi|^2$ är ej längre konstant utan kan variera. Den elektromagnetiska responsen påverkas. T ex blir λ både fält- och lägesberoende.

Man kan visa att Ginzburg-Landaus teori inte bara är giltig nära T_c eller H_c , där $\psi(r)$ är liten. Den är också tillämpbar väl under det kritiska området. Vi går inte in i detalj på dessa aspekter utan hänvisar till litteraturen, se t ex artikel av N R Werthamer, "The Ginzburg-Landau equations and their extensions", som är kapitel 6 i "Superconductivity" (R.D. Parks, ed., Vol 1, p 321).

V.2. Karakteristiska längder i Ginzburg-Landaus teori

(a) Penetrationsdjup

Vi får Londons ekvation ur GL om vi försummar $\nabla \psi$, dvs antar att ψ är en konstant

$$j_s = \nabla \times H = -(1/\mu_0) \nabla^2 A = -(e^{*2}/m^*) |\psi_\infty|^2 A$$

(där vi valt potentialen så att $\nabla \cdot A = 0$).

Fält, parallella till gränssytan hos ett supraledande halvrum, penetrerar med amplituden proportionell mot $\exp(-\text{avståndet}/\lambda(T))$, där

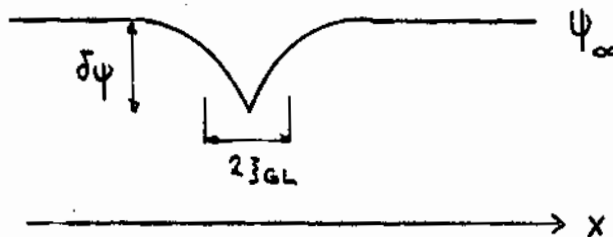
$$\lambda^2(T) = m^*/\mu_0 e^{*2} |\psi_\infty|^2$$

Då $|\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta \sim T_c - T$ fås också

$$\lambda(T) \sim (T_c - T)^{-1/2} \quad \text{nära } T_c.$$

(b) Koherenslängd

Vi skall nu betrakta den karakteristiska längd över vilken störningar av den supraledande ordningsparametern klingar av. Betrakta först fallet då inga fält är närvarande, $A = 0$ och j kan anses vara noll. Antag att ψ störs lokalt från sitt jämviktsläge enligt nedanstående skiss



$$\psi = \psi_\infty + \delta\psi, \quad \text{där} \quad \delta\psi \ll \psi_\infty$$

$$GL1: \alpha(\psi_{\infty} + \delta\psi) + \beta(\psi_{\infty} + \delta\psi)^3 + (\hbar^2/2m^*)\nabla^2(\psi_{\infty} + \delta\psi) = 0$$

$$\text{Eftersom } \alpha\psi_{\infty} + \beta\psi_{\infty}^3 = 0$$

$$-2\alpha\delta\psi + (\hbar^2/2m^*)\nabla^2(\delta\psi) = 0$$

vilket har lösningar av formen $\delta\psi \sim e^{-\sqrt{2}x/\xi}$

$$\text{där } \xi^2(T) = \hbar^2/2m^*|\alpha| = \xi^2(0) T_c/(T_c - T)$$

Den karakteristiska längden benämnes Ginzburg-Landaus koherenslängd.

Den fysikaliska betydelsen av ξ är uppenbar. En lokal distorsion ökar fria energin hos supraledaren. Supraledaren skulle vilja släcka ut störningen över så litet område som möjligt. Men gradienten i vågfunktionen skulle då ge stor kinetisk energi. GL-teorin ger att det optimala läkningsavståndet är ξ . Denna längd går mot oändligheten vid T_c eftersom kondensationsenergin går till noll där.

λ och ξ har samma temperaturberoende nära T_c . Innan vi bildar kvoten mellan dessa storheter så låt oss nämna att det är förvirrande med de olika koherenslängder och penetrationsdjup, som användes. Ett försök till en sammanfattning ges i tabell V.1.

Tabell V.1 Viktiga karakteristiska längder.

Definitioner:

BCS koherenslängd $\xi_0 = \hbar v_F / \pi \Delta(0)$

Londons penetrationsdjup $\lambda_L^2(0) = m/\mu_0 e^2 n$

Fri medelväglängd för elektroner $\lambda = v_F \tau$

λ -beroende:

Utsträckning av Cooperpar $\sim \xi_0$ för $\lambda \gg \xi_0$ (rena gränser)
 $\sim \sqrt{\xi_0 \lambda}$ $\lambda \ll \xi_0$ (smutsigt)

Pippards elektrodynamiska koherenslängd $\xi_p^{-1} \approx \xi_0^{-1} + \lambda^{-1}$

Ginzburg-Landaus koherenslängd $\xi(T) = \xi(0) \left(\frac{T_c}{T_c - T}\right)^{\frac{1}{2}}$ $T \approx T_c$

där $\xi(0) = 0.74 \xi_0$ $\lambda \gg \xi_0$
 $0.86 \sqrt{\xi_0 \lambda}$ $\lambda \ll \xi_0$

Penetrationsdjup i lokala fallet, $\xi_p \ll \lambda(T)$

$\lambda = \lambda_L(T)$ $\lambda \gg \xi_0$
 $(\xi_0/1.33\lambda)^{\frac{1}{2}} \lambda_L(T)$ $\lambda \ll \xi_0, T \approx T_c$
 $(\xi_0/\lambda)^{\frac{1}{2}} \lambda_L(T)$ $\lambda \ll \xi_0, T \approx 0$

i icke-lokala fallet, $\xi_p \gg \lambda(T)$

$\lambda \approx (\lambda_L \xi_0)^{1/3}$

V.3 Ginzburg-Landau parameter κ

Den berömda dimensionslösa parametern κ i G-L-teorin definieras som

$$\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$$

Med definitionerna på λ och ξ fås

$$\begin{aligned} \kappa &= (m^*/\mu_0 e^{*2} |\psi_\infty|^2)^{1/2} / (\hbar^2/2m^* |\alpha|)^{1/2} = \\ &= \frac{m^* (2B)^{1/2}}{\hbar e^* \mu_0} = \frac{m^* (2\alpha^2)^{1/2}}{\hbar e^* \mu_0^2 H_C^2} = \frac{\hbar}{e^* \xi^2 \sqrt{2\mu_0 H_C}} = \\ &= \frac{\hbar}{e^* \lambda^2 \sqrt{2\mu_0 H_C}} \\ \kappa &= \frac{\sqrt{2e^* \mu_0 H_C} \lambda^2}{\hbar} = \frac{2\sqrt{2}\pi\mu_0 H_C \lambda^2}{\Phi_0} \end{aligned}$$

dvs uttryckt i mätbara storheter.

Vidare kan vi teckna

$$\pi\lambda\xi = \pi\lambda^2/\kappa = \Phi_0/2\sqrt{2}\mu_0 H_C$$

V.4. Ytenergi för domänväggar

Vi har tidigare argumenterat att ytenergin associerad med en supraleddare/normal metall - övergång är av storleksordningen $\Delta G_{yt} = \delta \cdot \frac{1}{2} \mu_0 H_C^2$, där $\delta \approx \xi - \lambda$ (jämför IV.4). Vi skall nu betrakta ett exempel, där vi använder oss av GL-teorin för beräkning av ytenergin.

Vi beräknar ytenergin för en typ I supraleddare. I denna kan vi försumma inträngningen av magnetfältet eftersom $\lambda \ll \xi$. Ordningsparametern $\psi(r)$ varierar över ett område bestämt av ξ . Vi sätter $\psi(r) = 0$ för $x = 0$ och $\psi(r) = \psi_\infty$ för $x = \infty$, då gränssytan väljs vinkelrätt mot x-axeln och korsar denna i $x=0$. Vi skall nu jämföra supraleddarens energi då vågfunktionen varierar med fallet då den ej varierar, dvs utan gränssyta, då vi vet att kondensationsenergin är $-\frac{1}{2} \mu_0 H_C^2$ per volymenhet.

Ginzburg-Landau första ekvation ger (då $A=0$):

$$\alpha\psi + \beta\psi^3 - (\hbar^2/2m^*)d^2\psi/dx^2 = 0.$$

Medan ytenergin

$$\Delta G_{yt} = \delta \cdot \frac{1}{2} \mu_0 H_C^2 = \int_0^\infty dx \{ \alpha\psi^2 + (\beta/2)\psi^4 - (\hbar^2/2m^*)|d\psi/dx|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_C^2 \}$$

Vi sätter $\psi = f\psi_\infty$ där $f=0$ för $x=0$, $f=1$ för $x=\infty$

Den första ekvationen:

$$\alpha f + \beta\psi_\infty^2 f^3 - (\hbar^2/2m^*)d^2f/dx^2 = 0$$

blir med $\psi_\infty^2 = -\alpha/\beta$; $\xi^2 = \hbar^2/2m^*\alpha$

$$f - f^3 + \xi^2 d^2f/dx^2 = 0$$

Multipluera med df/dx , integrera och beakta randvillkoret att $f \rightarrow 1$, $x \rightarrow \infty$:

$$\xi^2 (df/dx)^2 + f^2 - f^4/2 = \frac{1}{2}$$

$$\xi^2 (df/dx)^2 = (1-f^2)^2/2$$

(vilken har lösningen $f = \tanh(x / \sqrt{2} \xi)$)

För ytenergin (använd $\mu_0 H_c^2/2 = \alpha^2/2\beta$)

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^\infty dx \left\{ \left[(-\alpha^2/\beta) f^2 + (\beta/2)(\alpha/\beta)^2 f^4 + \xi^2 (\alpha^2/\beta) (df/dx)^2 \right] / (\alpha^2/2\beta) + 1 \right\} \\ &= \int_0^\infty dx \left\{ -2f^2 + f^4 + 1 + 2\xi^2 (df/dx)^2 \right\} = 2 \int_0^\infty (1-f^2)^2 dx \end{aligned}$$

Gå över från x till f som integrationsvariabel och utnyttja än en gång sambandet mellan df/dx och $1-f^2$:

$$\delta = 2 \int_0^1 (1-f^2)^2 (dx/df) df = 2\sqrt{2} \xi \int_0^1 (1-f^2) df = (4\sqrt{2}/3)\xi = 1.89 \xi$$

Vi får således δ av storleksordningen ξ för den rena gränsen, $\xi \gg \lambda$, dvs $\kappa \ll 1$. I den motsatta gränsen, $\kappa \gg 1$, fås istället $\delta = -1.10\lambda$.

Kvalitativt gäller således att δ är av storleksordningen $\xi^{-\lambda}$. En noggrann behandling ger att man får en teckenväxling (positiv/negativ) hos ytenergin för $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Typ I för $\kappa < 1/\sqrt{2}$, typ II för $\kappa > 1/\sqrt{2}$.

V.5. Nukleering av supraledning vid H_{c2}

Nu kommer vi att betrakta en supraledare i ett starkt magnetiskt fält. Vid tillräckligt höga fält blir metallen normal och fältet är uniformt i provet. Minskar vi fältet kommer supraledning att nukleeras spontant vid ett fält H_{c2} trots att detta kan vara avsevärt högre (eller lägre) än H_c , det sk termodynamiska fältet. Detta påstod Abrikosov (1957) och vi skall se hur GL-teorin ger bakgrunden till påståendet.

I de regioner, där supraledning börjar uppträda, är $|\psi|$ liten. Vi behöver bara ta med termer linjära i ψ i GL-1.

$$\alpha\psi + (1/2m^*)(-\hbar^2\nabla^2 - e^*A)^2\psi = 0$$

Vi kan sätta $\nabla \times A = \mu_0 H_a$. Detta gäller, ty superströmmarna, som är av storleksordningen $|\psi|^2$, är små och den korrektion de ger till fältet kan försummas.

Den högra termen är Hamiltonoperatoren för en partikel, med massan m^* och laddningen $-e^*$, som rör sig i ett magnetiskt fält. Detta problem har vi stött på tidigare i fysiken (jfr t ex deHaas-van Alphen-effekten). Om vi betraktar fältet i z -riktningen, $A = \mu_0 H(0,x,0)$, finner vi att partikeln rör sig med konstant hastighet v_z längs fältet, medan den beskriver en harmonisk rörelse i xy -planet (spiralformig bana).

Egenvärdena är av formen

$$\epsilon_n = (n+\frac{1}{2}) \hbar\omega_c + \frac{1}{2}m^*v_z^2$$

där $\omega_c = \mu_0 e^* H / m^*$

Den lägsta energinivån fås för $n=0$, $v_z=0$. Vi skulle således kunna få en lösning med $\psi \neq 0$ för ett maximalt värde på H givet av:

$$-\alpha = \frac{1}{2} \hbar \omega_c = \mu_0 e^* \hbar H / 2m^*$$

Vi benämner detta värde H_{c2} och skall ge ett uttryck som relaterar H_{c2} till H_c och κ .

Eftersom $\alpha^2/2B = \mu_0 H_c^2/2$ och $2B = \mu_0 (\kappa \hbar e^*/m^*)^2$ fås

$$\mu_0 H_c^2/2 = (\mu_0 e^* \hbar H_{c2}/2m^*)^2 / \mu_0 (\kappa \hbar e^*/m^*)^2$$

$$H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_c.$$

För $\kappa > 1/\sqrt{2}$ fås en kondenserad fas inne i provet för $H < H_{c2}$ ($> H_c$). Eftersom en fullständig Meissnereffekt är energetiskt ofördelaktig för $H > H_c$, fås ingen fullständig utträngning av fältet. Under H_{c2} fås ett stort antal flödeslinjer, var och en med flödet ϕ_0 , i supraledaren. Antalet flödeslinjer beror på fältets styrka. Det minskar med minskande fältstyrka och de sista flödeslinjerna trängs ut ur supraledaren vid ett fält H_{c1} , som är mindre än H_c .

H_{c1} kan beräknas från den energi per längdenhet, som är associerad med flödeslinjen. Man får

$$H_{c1} \approx H_c \ln \kappa / (\sqrt{2} \kappa)$$

eller, om vi bortser från faktorn $\ln \kappa$, fås att H_c är ungefärligt lika med geometriska genomsnittet av H_{c1} och H_{c2} .

För $\kappa < 1/\sqrt{2}$ kan man få underkyllning av typ I supraledare. Dvs de förblir normala då fältet minskar under H_c tills H_{c2} nås. Där fås ett diskontinuerligt och irreversibelt språng i ordningsparametern till jämviktsläget ψ_0 . (Hysteresen är i motsats till typ II supraledare där man har en reversibel förändring av $|\psi|^2$, för ökande och minskande fält under H_{c2} .) I praktiken orsakar defekter i provet el dyl oftast nukleering av supraledning vid fält väl över H_{c2} för typ I supraledare.

Med tidigare uttryck för κ kan vi också teckna

$$H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_c = \phi_0 / 2\pi \xi^2(T) \mu_0$$

V.6. Gitter av flödestrådar

I mitten av en flödestråd har vi "normalt" material med magnetisk flödestäthet (se avsnitt IV.5 och figur IV.9). "Kärnan" har en radiell utsträckning av storleksordningen ξ . Ström flyter runt kärnan inom ett område med utsträckningen λ . Situationen är mycket lik den för virvlar i supraflytande helium (magnetiskt fält i supraledare korresponderar mot rotation av supraflytande helium). Energin per längdenhet hos en flödestråd är av storleksordningen $2\pi \mu_0 H_c^2 \xi^2 \ln \kappa$. Två flödestrådar har flöden med samma riktning och repellerar varandra. Växelverkansenergin är proportionell mot $(\Delta r)^{-2} \exp(-\Delta r/\lambda)$ vid långt avstånd, Δr , mellan flödeslinjerna. Den blir mycket liten vid stora avstånd varför det kostar litet energi att öka deras antal. Det är pga detta, som magnetiseringen vid H_{c1} har en oändlig derivata.

Antalet flödestrådar ökar snabbt för $H > H_{c1}$. Växelverkansenergin blir lägst om flödestrådarna ligger periodiskt med lika avstånd mellan sig. Ett tvådimensionellt, triangulärt gitter av flödestrådar är stabilast (även om energin för ett kvadratisk gitter är nästan lika låg). Experimentella studier medelst elektronmikroskopi och neutroddiffraction berördes i IV.5.

Skickas en ström genom supraledaren kommer flödestrådarna att påverkas av en Lorentz-(eller Magnus-) kraft, som är vinkelrät mot såväl magnetiska fältet som strömmen, $F \sim B \times I$. I och med att flödestrådarna rör sig så induceras också en spänning. Således har vi ett (litet) spänningsfall över (och en effektförlust i) en strömgenomfluten typ II supraledare för $H_{c1} < H < H_{c2}$. I

praktiken minskas detta spänningsfall avsevärt av att flödesrören låses till defekter och dylikt i supraledaren så att de ej rör sig.

Vi kan också i detta sammanhang nämna en kuriositet, en likspänningstransformator, som man kan tillverka. En tunn film har en kort fri medelvåglängd och blir en typ II supraledare. I ett fält (vinkelrätt mot filmytan) kommer det att uppstå en spänning över filmen eftersom flödesrör rör sig genom den. Läger vi en andra supraledande film ovanpå den första (med isolering mellan), så induceras en sekundärspänning som blir ungefärligt lika stor som primärspänningen. Med ytterligare en film ovanpå, som kopplas i serie med den förra, fås dubbla spänningen, etc. Transformatorn har ingen praktisk tillämpning.

V.7. Ytsupraledning, H_{c3}

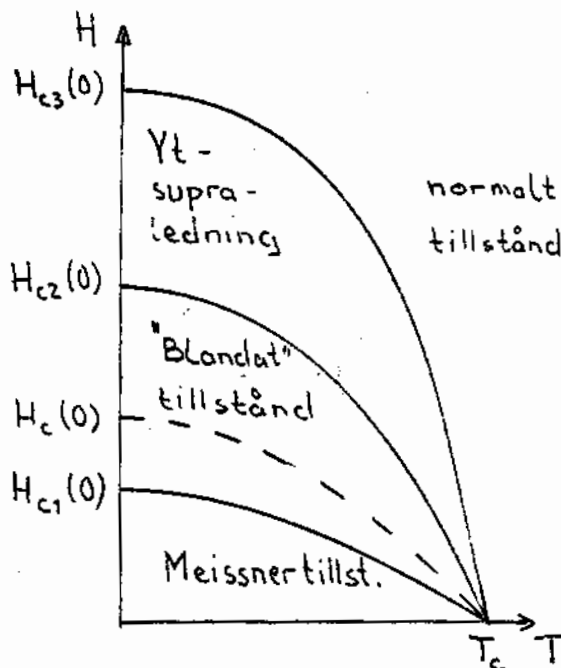
Vid ytan av en supraledare är det möjligt att nukleera supraledning vid fält högre än H_{c2} . Saint-James och de Gennes hanterade GL-ekvationerna med rätt randvillkor för gränsytan mellan supraledaren och vakuum. De fann att om en harmonisk potential centrerad 0.59ξ under ytan adderas till GL-ekvation som beskriver ordningsparametern, så gavs ett stabilt läge med ett ändligt värde på $\psi(x)$ nära ytan (inom ca ξ) trots att det magnetiska fältet parallellt med ytan var större än H_{c2} , det värde där supraledning först nukleeras inne i typ II-supraledaren.

Fältet där supraledning nukleeras vid ytan

$$H_{c3} \approx 2.4 \kappa H_c \approx 1.7 H_{c2}$$

Skiktet där ytsupraledningen existerar är så tunt att det är utan någon större praktisk betydelse.

V.8. Magnetiskt fasdiagram för typ II supraledare



Vi kan sammanfatta beteendet hos en typ II supraledare i vidstående diagram, V.2.

V.9. Närhetseffekt - överlagrade filmer i metallisk kontakt

Betrakta en supraledande film i kontakt med en "normal" metallisk film. Om den supraledande filmen ej är alltför tjock (dvs tjockleken är mindre än någon gång koherenslängden), så minskar dess supraledande övergångstemperatur. Samtidigt induceras supraledning i den "normala" metallen. Vi kan beräkna ordningsparametern i Ginzburg-Landaus teori för gränsytan. Resultatet liknar vad som ges i figur V.3.

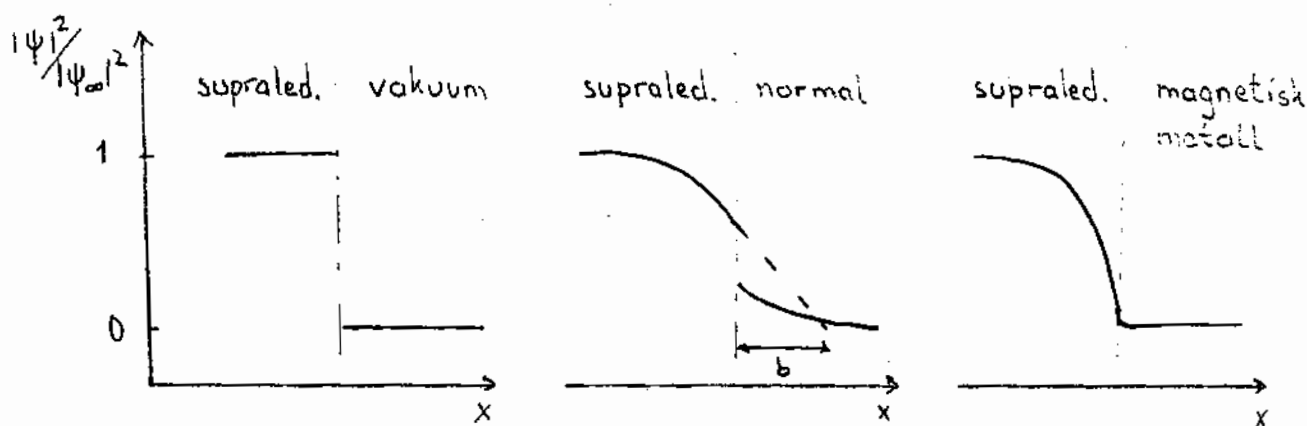


Fig. V.3

Populärt kan vi säga att elektronpar läcker ut från supraledaren in i den "normala" metallen. Där har vi ej längre en attraktiv växelverkan utan paret bryts. Paret har dock en viss livstid i den normala metallen.

T_c för två överlagrade filmer kan ha ett utseende beroende på de ingående filmtjocklekarna som i figur V.4.

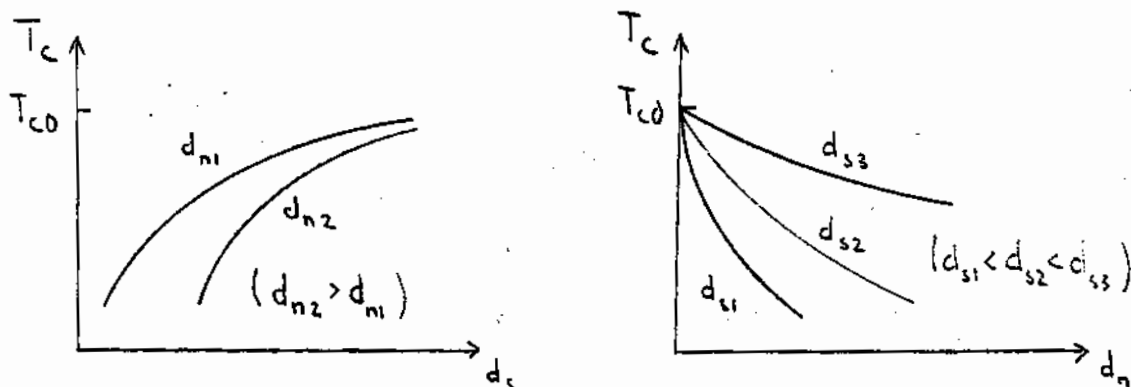


Fig. V.4 T_c hos en metallisk kontakt som funktion av tjocklekarna hos de supraledande och normala skikten.

Man kan få en uppfattning av den effektiva växelverkan (t ex beskriven av $N(o)V$ i BCS-teorin där $N(o)$ är tillståndstätheten för elektroner vid E_F och V är växelverkansparametern) i den "normala" metallen och därigenom uppskatta ett värde på dess T_c . Detta bör dock konstateras att sådana extrapolationer i allmänhet ger osäkra värden.

I den s k Coopergränsen, då tjocklekarna d_s och d_n är små och fria medelvåglängden är kort fås ett särskilt enkelt uttryck för den effektiva växelverkansparametern :

$$(NV)_{\text{eff}} = \frac{N_n^2(o)V_n d_n + N_s^2(o)V_s d_s}{N_n(o)d_n + N_s(o)d_s}$$

Uttrycket kan förstås om man beaktar att en elektron vistas en del $N_n(o)d_n / (N_n(o)d_n + N_s(o)d_s)$ av sin tid i normala metallen n.

Tunnelmätningar kan uppskatta gapparametrar i överlagrade skikt. Gaplös supraledning kan i vissa fall observeras. Vi återkommer till detta koncept senare. Nya typer av växelverkningar har föreslagits för multilager av superporterade skikt. Några avgörande bevis för sådana fenomen finns dock ej ännu.

V.10. Fluktuationer för $T > T_c$

Vi har koncentrerat oss på att finna $\psi(x)$ som ger minimal fri energi i jämvikt. Emellertid kan termodynamiska fluktuationer leda till att systemet kan känna av andra $\psi(x)$ och man får en icke-försumbar statistisk vikt för ψ som endast ökar fria energin $\approx kT$. T ex ger termiskt aktiverat flödeskryp upphov till en ändlig resistans under T_c i en typ II supraledare. Vidare är det möjligt för den metastabila stående strömmen i en supraledande ring att ändras i kvantsprång då antalet fluxoidkvanta kan minska. Av speciellt intresse för oss är att betrakta fluktuationer för $T > T_c$ där det är möjligt att få supraledande effekter eftersom

$$\langle \psi^2 \rangle \neq 0 \text{ trots att } \langle \psi \rangle = 0.$$

Jämför vi med en ferromagnet ovanför Curiepunkten, så vet vi att vi har ett starkt temperaturberoende paramagnetiskt bidrag till susceptibiliteten, $\chi = C/(T-\theta)$. Vi har fluktuationer i den magnetiska ordningen. På samma sätt finns det sk "short range order" ovanför transformations-temperaturen vid strukturell ordning/oordning.

Vi har tidigare sagt att det ordnade supraledande tillståndet försvinner språngartat vid T_c . Breddade övergångar i rena prov har skylts på inhomogenerheter och inre spänningar; med bättre prov har övergångarna blivit skarpare. Men spår av T_c kan faktiskt detekteras ovan T_c , i vissa fall är effekterna utpräglade. Mäter man resistansen hos en tunn, ordnad film (t ex Bi kondenserad på en kall yta) finner man att övergången kan börja (i mycket svagt tempo) väl över T_c , kanske vid dubbla T_c . Likadant visar susceptibilitetsmätningar på lagrade strukturer (i stort sett två-dimensionella supraledande flak åtskilda av ett variabelt antal molekyler) att den supraledande diamagnetismen börjar utbildas väl över T_c , i vissa fall vid ca 35 K vilket är en storleksordning större än T_c . Se t ex Geballe m fl, Sci. Am., Nov. 71).

En behandling baserad på GL-teorin (Schmid, 1969) ger $\Delta\chi \approx -10^{-7}(T/T_c)^{3/2}$, alltså ett bidrag som, fränsett ökningen beroende på temperaturfunktionen, är av samma storleksordning som Landau-diamagnetismen i vanliga metaller.

För konduktansen hos tunna filmer fås ett extra, temperaturberoende bidrag som exemplifieras i figur V.5. En teoretisk behandling av tidsberoendet hos ordningsparametern (små fluktuationer har ändlig livstid, elektronparet "lever" en kort tid) visar att bidraget till konduktiviteten beror på ledarens dimensionalitet. För ett tredimensionellt prov fås det extra bidraget:

$$\sigma_{3d}^1 = (e^2/32\pi \xi(0))(T/T_c)^{3/2}$$

Koefficienten framför temperaturberoendet är endast ca 10^{-7} av den normala konduktiviteten σ_n , varför bidraget blir märkbart endast mycket nära T_c . För en två-dimensionell ledare med tjocklek $d \ll \xi$ fås

$$\sigma_{2d}^1 = (e^2/16\pi d)(T/T_c)$$

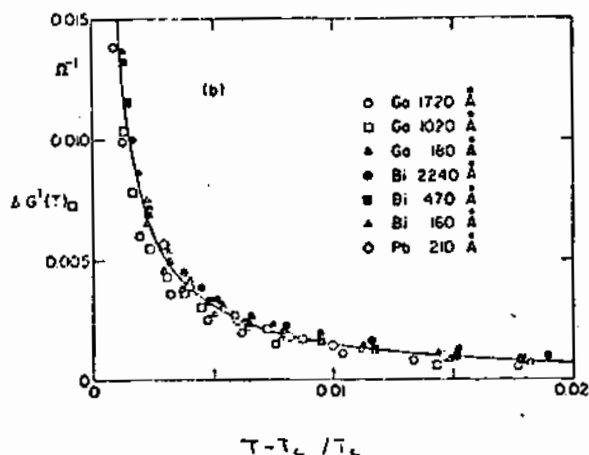


Fig. V.5 Extra bidraget till elektriska konduktiviteten ovan T_c i tunna, närmast 2-d, filmer. Det temperaturberoende bidraget orsakas av supraledande fluktuationer - Cooper-par med kort livstid.

Särskilt för oordnade, mycket tunna filmer är σ_D relativt liten varför σ'_{2d} kan ge ett avsevärt bidrag. För en en-dimensionell ledare med tvärsnittet $A \ll \xi$

$$\sigma_{1d}^2 = (\pi e^2 \xi(0) / 16 \kappa A) (T/T_c)^{3/2}$$

För en D-dimensionell ledare har vi således för extrabidraget

$$\sigma_D^2 \sim (T/T_c)^{2-D/2}$$

V.11. Sammanfattning

Ginzburg-Landau teori: Speciellt lämpad för situationer, där den supraledande ordningen varierar i rummet. Utveckling av fria energin i jämna potenser av en ordningsparameter ψ . Variation av ordningsfunktionen i rummet ger en kinetisk energi proportionell mot $(\nabla\psi)^2$. Magnetiskt fält ger elektromagnetisk impuls samt fältenergi. Totalt fås

$$g_S = g_n + \alpha |\psi|^2 + (\beta/2) |\psi|^4 + (1/2 m^*) |(-i\hbar\nabla - e^* A) \psi|^2 + (1/2 \mu_0) (\nabla \times A)^2$$

Variation med ordningsparameter och fält ger Ginzburg - Landau ekvationer :

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + (1/2 m^*) (-i\hbar\nabla - e^* A)^2 \psi = 0$$

$$j = (e^* \hbar / 2m^*) (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - ((e^*)^2 / m^*) \psi^* \psi A$$

Ekvationerna ger penetrationsdjup för pålagt fält, koherenslängd för störning av supraledande ordningen, ytenergi för domänväggar.

$$\kappa = \lambda / \xi \quad \text{beroende av fri medelväglängd}$$

$$H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_c$$

$$H_{c1} \approx (H_c \ln \kappa) / \sqrt{2} \kappa \quad (H_{c1} - H_{c2} \approx H_c^2)$$

$$H_{c3} \approx 1.7 H_{c2}$$

Metallisk kontakt ger inducerad supraledning i normalt ytskikt samt nedgång i ψ inom ξ från gränssytan.

Fluktuationer i ψ för $T > T_c$ märkbara i 2- och 1-dimensionella ledare.