Institutionen för teknisk fysik
Chalmers tekniska högskola
Per Sundell och Göran Wahnström, 2007-10-11

FKA145 Fysiken omkring oss
Beräkningsprojekt

Projektilrörelse med flera tillämpningar inom fotboll

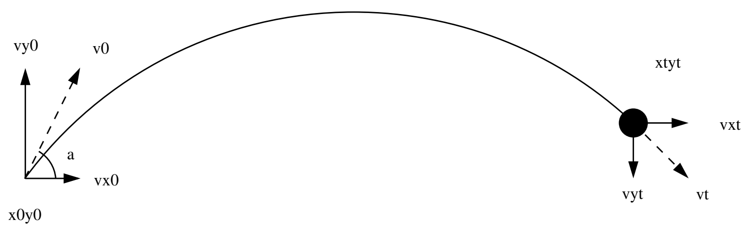
Många sportgrenar baseras på någon form av *projektilrörelse*. Projektilen som används kan antingen vara den egna människokroppen (som i exempelvis längdhopp, tresteg, höjdhopp eller stavhopp), eller något speciellt föremål vars utseende och vikt är noga bestämt av sportens regler (som till exempel slägga, diskus eller spjut). De flesta bollsporter kan också ses som naturliga tillämpningar av projektilrörelsen. Normalt påverkas föremålet, projektilen, av både gravitationen och olika friktionskrafter under sportens utövande. De senare beror till stor del på hastigheten relativt omgivningen, men även på föremålets form och ytegenskaper.

Kastparabeln

Betrakta först ett föremål som rör sig under inverkan av enbart gravitationen. Antag att rörelsen sker i xy-planet, och att tyngdkraften verkar i negativa y-riktningen. Föremålets position $(x(t), y(t))$ som funktion av tiden t bestäms då av ett linjärt system av andra ordningens ordinära differentialekvationer (ODE)

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} & = & 0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} & = & -mg \end{cases} \tag{1}$$

där g är tyngdaccelerationen och m föremålets massa. Ekvationerna (1) kan enkelt lösas analytiskt, givet att man känner till föremålets begynnelseposition (x_0, y_0) samt begynnelsehastighet (v_{x0}, v_{y0}). Lösningen är den välkända *kastparabeln* (se figur 1). Genom att



Figur 1: Kastparabeln

införa hastigheterna $v_x \equiv \frac{dx}{dt}$ och $v_y \equiv \frac{dy}{dt}$, kan man även skriva om (1) som ett system av första ordningens ekvationer

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & v_x \\ \frac{dv_x}{dt} & = & 0 \\ \frac{dy}{dt} & = & v_y \\ \frac{dv_y}{dt} & = & -g \end{cases} \tag{2}$$

vilket är en lämplig form för att behandla problemet numeriskt [1].

Tabell 1: Data för några vanliga bollsporter från De Mestre [2].

Projektil	m (kg)	A (m^2)	v_0 (m/s)	Re	ϵ
Baseball	0,15	0,004	40	$1,9 \times 10^5$	0,53
Golf	0,05	0,001	70	$1,9 \times 10^5$	1,23
Fotboll	0,42	0,038	30	$4,4 \times 10^5$	1,02
Tennis	0,06	0,003	40	$1,6 \times 10^5$	1,00
Bordtennis	0,002	0,001	25	$0,7 \times 10^5$	8,80

Luftmotstånd

I de flesta sportgrenar måste även effekterna av luftmotstånd inkluderas för en realistisk beskrivning av kaströrelsen. En vanlig modell är att beloppet av friktionskraften $\vec{F}_D$ som verkar på ett föremål är proportionellt mot kvadraten på föremålets fart $v \equiv |\vec{v}|$ relativt den omgivande luften enligt

$$F_D = \frac{1}{2} C\rho A v^2, \tag{3}$$

där C är den så kallade *luftmotståndskoefficienten*, ρ är luftens densitet, och A är föremålets tvärsnittsarea. Luftmotståndskoefficienten är ofta i storleksordningen 1, men det precisa värdet beror på föremålets hastighet, form och ytegenskaper (för en jämn sfär är exempelvis $C \approx 0,5$ vid låga hastigheter) och måste normalt bestämmas genom experiment. Ofta finner man att C minskar betydligt vid höga hastigheter, och att denna effekt är mer uttalad för projektiler med skrovlig yta. Anledningen är att luftströmmen kring föremålet övergår från *laminär* till *turbulent* när v ökar. Typiska värden på massa, tvärsnittsarea och utgångshastighet för projektiler i några vanliga bollsporter finns i Tabell 1. Det så kallade *Reynoldstalet* Re karaktäriserar luftströmmen kring föremålet; övergången från laminärt till turbulent flöde sker vid $Re \sim 10^5$, och intressant nog verkar många bollsporter ligga just inom intervallet $Re = 1 \times 10^5 - 2 \times 10^5$ [2]. Slutligen anges kvoten $\epsilon = \frac{C\rho A v_0^2}{2mg}$ som ett enkelt mått på hur stort luftmotståndet är jämfört med gravitationens inverkan.

Betrakta nu ett föremål som rör sig i xy-planet under inverkan av både tyngdacceleration och luftmotstånd. Friktionskraften F_D från luften antas bero på föremålets fart $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ enligt ekvation (3). Denna kraft är alltid motriktad hastigheten, så att komposanterna i x- och y-led ges av $-F_d v_x/v$ och $-F_d v_y/v$, respektive. Ekvationssystemet (2) måste därmed modifieras till

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & v_x \\ \frac{dv_x}{dt} & = & -\frac{C\rho A}{2m}\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}v_x \\ \frac{dy}{dt} & = & v_y \\ \frac{dv_y}{dt} & = & -g - \frac{C\rho A}{2m}\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}v_y \end{array} \right. \tag{4}$$

Dessa ekvationer är inte längre linjära, och kan normalt inte lösas analytiskt.

Roterande projektiler

Om en projektil roterar, kommer farten relativt den omgivande luften inte längre att vara lika stor på motstående sidor av föremålet. Därmed kommer även friktionskrafterna på sidorna bli olika, vilket ger en resulterande kraft $\vec{F}_M$ som är vinkelrät mot både *rotationsvektorn* $\vec{\omega}$ (en vektor vars storlek ges av vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi\times$ (varvtalet), och vars riktning sammanfaller med rotationsaxeln) och föremålets hastighet $\vec{v}$ enligt

$$\vec{F}_M = S\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{5}$$

där koefficienten S beror på medelvärdet av luftmotståndskoefficienten över föremålets yta. För exempelvis en projektil med konstant rotationsvektor längs y-axeln och hastigheten riktad längs x-axeln kommer $\vec{F}_M$ att peka i negativa z-riktningen. Rörelsen blir då inte längre begränsad till ett plan, och ekvationssystemetet (4) måste kompletteras med ytterligare två ekvationer. Approximativt beskrivs föremålets läge och hastighet av

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{C\rho A}{2m}\sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g \\ \frac{dz}{dt} &= v_z \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{S\omega}{m}v_x \end{cases} \tag{6}$$

om det kan antas att hastighetskomposanterna v_y och v_z är små.

Uppgift 1 - Utspark i fotboll

a. Förenklad modell

Studera först rörelsen hos en sparkad fotboll. I den enklaste approximationen försummas luftmotståndets inverkan på bollbanan helt. Eftersom rörelseekvationerna då enkelt kan lösas analytiskt, är detta ett lämpligt testproblem för att bedöma noggrannheten i en numerisk metod. Utgå från systemet av första ordningens linjära differentialekvationer (2), och integrera dessa med `ode45` i Matlab. Antag att bollen startar i punkten $x_0 = y_0 = 0$ med begynnelsehastigheten $\vec{v}_0$ riktad en vinkel $\theta_0 = 36°$ upp från marken. Ett typiskt värde för v_0 fås ur bifogad tabell. Tyngdaccelerationen kan sättas till $g = 9,81$ m/s^2. Starta vid tiden $t = 0$, och välj en lämplig sluttid t_{final} så att bollen åter hinner nå marken (dvs $y = 0$). Plotta bollens bana i xy-planet, och jämför med den analytiska lösningen för att kontrollera riktigheten hos de numeriska resultaten. En fotbollsplan är som längst 120 m lång (110 m i internationella matcher) och en bra utspark kan landa nära mittlinjen. Verkar det erhållna avståndet till bollens nedslagsplats rimligt?

b. Effekten av luftmotstånd

Inkludera nu friktionen från luften enligt modellen (3). Rörelseekvationerna (4) kan nu inte längre lösas analytiskt, men integreras enkelt numeriskt på liknande sätt som i Uppgift 1. Luftmotståndskoefficienten kan antas vara $C = 0,2$ oberoende av bollens hastighet. Värden på en fotbolls massa och tvärsnittsarea fås ur bifogad tabell. Vid havsytans nivå är luftens densitet $\rho = 1,2$ kg/m^3 vid normala tryck och temperaturer. Hur långt hinner nu bollen innan den når marken om i övrigt samma begynnelsevillkor som i Uppgift 1 används?

c. Effekten av vind

Undersök nu hur mycket vinden kan påverka längden på en utspark. Eftersom friktionen bestäms av den relativa rörelsen mellan bollen och dem omgivande luften, ändras såväl luftmotståndskraftens belopp som riktning i ett markbundet koordinatsystem om luften över fotbollsplanen rör sig. Exempelvis blir F_D proportionell mot $|\vec{v} - \vec{v}_{\text{vind}}|^2$, där $\vec{v}_{\text{vind}}$ är vindhastigheten. Antag att en konstant vind blåser längs x-axeln. Skriv ner de modifierade rörelseekvationerna, och integrera sedan dessa numeriskt. Hur stora blir effekterna av en måttlig med- eller motvind på 5 m/s, om i övrigt samma begynnelsevillkor som i Uppgift 1 används?

d. Skruvade bollar

En misslyckad utspark kan oavsiktligt ha slagits med skruv. Enligt (5) kommer bollen i så fall att påverkas av en extra kraft, vars storlek och riktning beror på bollens hastighet och rotation. Generalisera först ekvationerna (6) till att gälla för godtycklig storlek och riktning hos $\vec{\omega}$ och $\vec{v}$ (men bortse från eventuell vind). Antag sedan för enkelhets skull att bollen roterar konstant 4 varv/s med rotationsaxeln i positiva y-riktningen, och bestäm bollens bana genom att integrera rörelseekvationerna numeriskt. Ett typiskt resultat från mätningar på verkliga fotbollar är $S/m \approx 5 \times 10^{-3}$. Hur stor blir då bollens maximala avlänkning i sidled (z-riktningen), om i övrigt samma begynnelsevillkor som i Uppgift 1 används?

Uppgift 2 - Modellering av en frispark

Sommaren 1997 gjorde Roberto Carlos ett berömt frisparksmål för Brasilien i en turnering i Frankrike. Frisparken slogs från ett avstånd av ungefär 30 m från motståndarnas mål och lite till höger om mitten (se filmklipp på websidan). Carlos slog bollen så långt till höger att den först gick runt försvarsmuren med ungefär en meters marginal, för att sedan böja av kraftigt till vänster, träffa insidan av stolpen och gå in i mål.

Modellera nu frisparkssituationen ovan. För en noggrann beskrivning av bollbanan behöver man ta hänsyn till hastighetsberoendet hos luftmotståndskoefficienten. För en jämn sfär av en fotbolls storlek som rör sig i luft vid rumstemperatur beskrivs $C(v)$

någorlunda väl av uttrycket

$$C(v) = 0,1 + \frac{0,4}{1 + \exp[(v - v_d)/\Delta]} \tag{7}$$

där $v_d = 23$ m/s är gränshastigheten för övergång mellan turbulent och laminär strömning, och $\Delta = 2$ m/s beskriver omslagsintervallets storlek. Lös rörelseekvationerna för en fotboll numeriskt, och tag hänsyn till att luftmotståndskoefficienten varierar med bollens fart v. Använd den givna modellen (7), eller hitta något mer realistiskt uttryck. Ett fotbollsmål är $7,32$ m brett och $2,44$ m högt. Det kan antas att försvarsmuren var placerad enligt reglerna (dvs minst $9,15$ m från bollen innan frisparken slogs) och så att det inte var möjligt att skjuta bollen direkt i mål. Försök visa *hur* Carlos slog sin frispark genom att variera bollens utgångsfart/-riktning, varvtal och rotationsaxel (inom realistiska gränser) tills bollens bana liknar den som beskrivits ovan. Diskutera resultaten!

Referenser

[1] N. J. Giordano, *Computational Physics*, (Prentice Hall, New Jersey, 1997).

[2] N. De Mestre, *The mathematics of projectiles in sport*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

[3] G. Ireson, *Beckham as physicist?*, Physics Education **36**, 10 (2001).