MEKANIK.

Syftet med att läsa en mekanikkurs är tvåfaldigt. Dels är mekanikkunskaper en del av den ingenjörsmässiga allmänbildningen och dels är mekaniken ett ämne som särdeles bra för att träna upp förmågan att lösa problemlösningsförmågan. Den som ska inrikta sina studier åt M-hållet kommer dessutom att ha mekanikkunskaper som yrkesmässigt verktyg.

Tempot i kursen är relativt högt och vi kan inte gå igenom allt på föreläsningarna och då måste du ofta läsa in detta i läroboken på egen hand.

Kinematik i en dimension:

Kinematiken, eller rörelseläran, är en av hörnstenarna i mekaniken. När det gäller endimensionell rörelse förutsätts att du har kunskaper från tidigare studier.

Begrepp som läge (x), hastighet (v), acceleration (a) är du bekant med sedan tidigare, men här kommer en snabbrepetition

Momentanhastigheten $v = dx/dt$
Momentanaccelerationen $a = dv/dt$

Om accelerationen är konstant gäller följande användbara samband

$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$

$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xf} + v_{xi})t$

$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Sätt dig in i hur man härleder dessa samband och räkna så många exempel så att du känner dig säker på hur man löser endimensionella rörelseproblem!

En vanlig situation där accelerationen är konstant är fritt fall. Om man låter koordinataxeln (vanligen y-axeln) peka uppåt, så är tyngaccelerationen $g = -9{,}81\ m/s^2$. Om koordinataxeln pekar nedåt är gäller att $g = +9{,}81$.

$$\left.\begin{aligned} dx &= v \cdot dt \\ v &= v_{ix} + at \end{aligned}\right\} \Rightarrow dx = (v_{ix} + at)\,dt$$

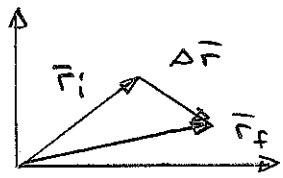
$$\Rightarrow \int_i^f dx = \int_i^f (v_{ix} + at)\,dt \Rightarrow x_f - x_i = v_{ix}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$t = t_f - t_i$$

Kinematik i två och tre dimensioner:

När vi utvidgar till två dimensioner framgår vektoregenskaperna av läge, hastighet och acceleration tydligt. I den följande texten kommer två olika beteckningar för vektorer att användas antingen fet text såsom lägesvektorn **r**, hastighetsvektorn **v** och accelerationsvektorn **a** eller $\bar{r}$, $\bar{v}$ och $\bar{a}$.

Förändring av lägesvektorn



$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$$

Momentanhastigheten **v** ges av sambandet

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt.$$

Observera att vi skiljer på de två begreppen hastighet och fart (engelska velocity och speed). Hastigheten är en vektor **v** medan farten v är en skalär - absolutbeloppet av v. Hastighetsmätaren i bilen visar bilens fart!

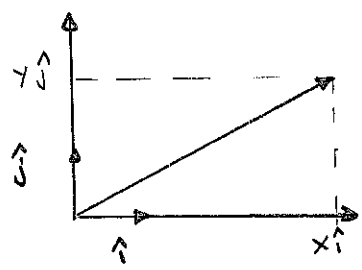
På samma sätt fås momentanaccelerationen **a**

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt.$$

Vi kommer att studera flera exempel där du får tillfälle att bekanta dig närmare med dessa samband.

När man tecknar en vektor i exempelvis ett tvådimensionellt ortonormerat koordinatsystem (rätvinkliga axlar och basvektorer utefter axlarna som har längd = 1) såsom ett vanligt xy-system skriver man:

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$$

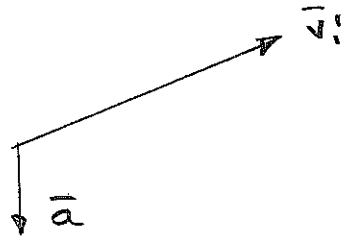


$\hat{\mathbf{i}}$ och $\hat{\mathbf{j}}$ är enhetsvektorer i x- respektive y-led.

Genom att använda samma resonemang som i det endimensionella fallet fås följande samband om accelerationen **a** är konstant. (Lägg märke till att detta innebär att såväl riktning som belopp av **a** är konstanta):

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$
$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{a}\,t^2$$

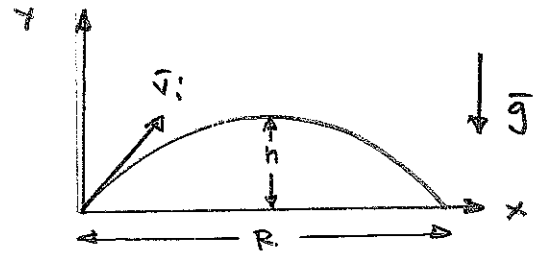
Ur det andra sambandet framgår att $\Delta\mathbf{r}$ ligger i det plan som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_i$ och **a**. Därför kan man ofta beskriva en tredimensionell rörelse i ett visst
plan.



Kaströrelser:

När man behandlar kaströrelser gör man ofta approximationen att luftmotståndet kan försummas och att g är konstant. Under dessa förutsättningar beskriver kaströrelsen en parabel. ($y = ax - bx^2$)

För rörelsen i horisontell led gäller att hastigheten är konstant medan rörelsen i vertikal led påverkas av tyngaccelerationen g.



Sambandet

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{a}\,t^2$$

är en vektorekvation och ger

$$x_f = x_i + v_{ix} t + \tfrac{1}{2}\,0\,t^2 = x_i + v_i \cos\theta_i\, t$$

samt

$$y_f = y_i + v_i \sin\theta_i\, t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2$$

genom att lösa ut t ur x-ekvationen och sätta in i y-ekvationen får man

$$y_f = (\tan\theta_i)\,x_f - (g/2v_i^2 \cos^2\theta_i)\,x_f^2$$

Man kan bland annat räkna ut den maximala kasthöjden h och kastlängden R. Man får då:

$$h = (v_i^2 \sin^2\theta_i)/g$$

samt

$$R = (v_i^2 \sin 2\theta_i)/g$$

Den senare ger att i man får den största kastlängden (i det idealiserade fallet) är utkastvinkeln är 45 grader.

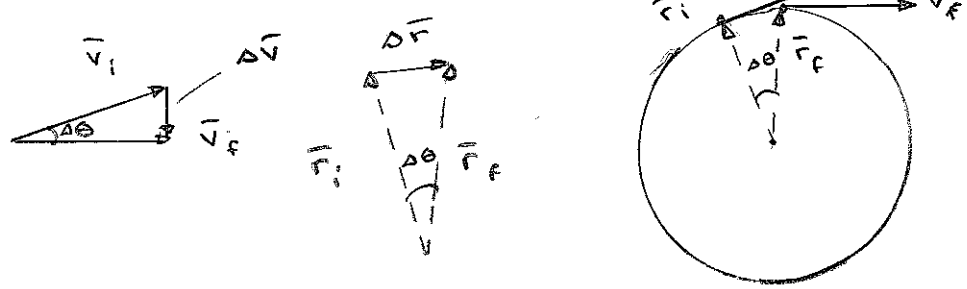
Uniform cirkulärrörelse:

Vi ska studera ett viktigt fall; uniform cirkulärrörelse. Det innebär att något rör sig i en cirkelformad bana med konstant fart v. Hastigheten **v** är däremot inte konstant eftersom dess riktning ändras under rörelsens gång. En bil som håller farten 50 km/h och som kör i en cirkelformad rondell är ett exempel på uniform cirkulärrörelse.

Om vi kräver att rörelsen ska vara cirkelformad, men tillåter att farten ändras har vi icke uniform cikulärrörelse. Detta kommer vi till lite senare.

Nu ska vi bara studera rörelsen och återkommer till vilka krafter som kan möjliggöra den senare när vi har bekantat oss med Newtons lagar och kraftbegreppet.

Eftersom **v** inte är konstant är accelerationen **a** skild från noll. Vi ska nu bestämma accelerationens belopp och riktning. Den acceleration som man talar om i uniform cirkulärrörelse kallas centripetalacceleration eller radiell acceleration. Beteckningarna är a_c eller a_r.



$|\bar{v}_f| = |\bar{v}_i| = v$

$|\bar{r}_f| = |\bar{r}_i| = r$

Medelacceleration:

$\bar{r}_i$ = läge vid tiden t_i $\qquad$ $\bar{r}_f$ = läge vid tiden t_f

$$\bar{a}_{ave} = \frac{\bar{v}_f - \bar{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} \qquad (1)$$

Trianglarna ovan är likformiga.

$$\Rightarrow \frac{|\Delta\bar{v}|}{v} = \frac{|\Delta\bar{r}|}{r} \qquad \Rightarrow |\Delta\bar{v}| = \frac{v}{r}|\Delta\bar{r}| \qquad (2)$$

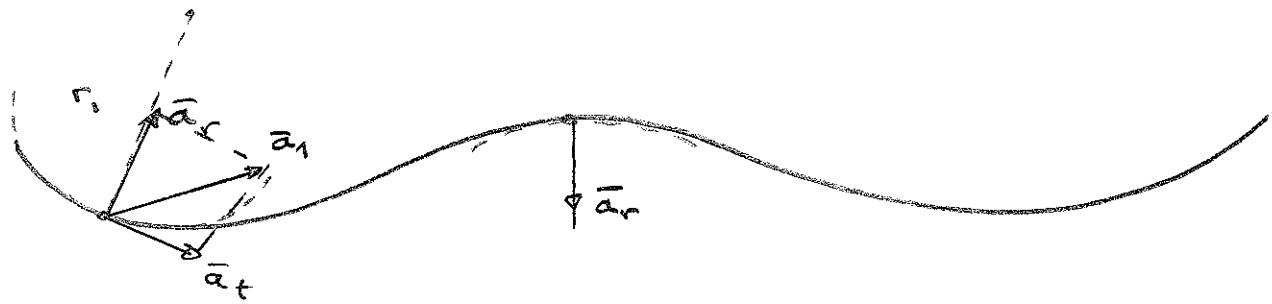
(1) ger $|\bar{a}_{ave}| = \dfrac{|\Delta\bar{v}|}{\Delta t}$

Insättning av (2) $\Rightarrow |\bar{a}_{ave}| = \dfrac{v}{r}\dfrac{|\Delta\bar{v}|}{\Delta t} = \dfrac{v^2}{r}$

Låt Δt gå mot noll. Då ser man att $\Delta\bar{v}$ riktas rakt mot cirkelns centrum.

Tangentiell och radiell acceleration:

Låt oss nu betrakta rörelse längs en bana som i figuren nedan.



För att kunna röra sig i en sådan bana krävs mer än centripetalacceleration.

Accelerationen har förutom $\mathbf{a}_r$ en komponent vinkelrät mot denna $\mathbf{a}_t$, tangentiella accelerationen. Den totala accelerationen **a** ges av uttrycket

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

$\mathbf{a}_r$ är alltid riktad in mot centrum av den tänkta cirkel som bestämmer den momentana cirkelrörelsen (med radien r) och sedan tidigare vet vi att

$$a_r = - v/r^2$$

Den tangentiella accelerationen $\mathbf{a}_t$ kan antingen vara riktad i den momentana färdriktningen eller motriktad denna.

$$a_t = dv/dt$$

Om farten ökar är dv/dt positiv och $\mathbf{a}_t$ pekar då i färdriktningen. Det innebär att den totala accelerationen **a** pekar snett inåt/framåt.
Om farten minskar är dv/dt negativ och $\mathbf{a}_t$ pekar mot färdriktningen. Det innebär att den totala accelerationen **a** pekar snett inåt/bakåt.

Vi kan kosta på oss att gå händelserna i förväg och snegla på vad det är som gör att en bil att köra i en bana som den i figuren överst på sidan. Såväl den radiella som den tangentiella accelerationen möjliggörs av friktion mot vägbanan.

Newtons lagar.

I de tidigare avsnitten har vi studerat rörelser. Nu kommer vi till det som åstadkommer rörelsen; KRAFTER

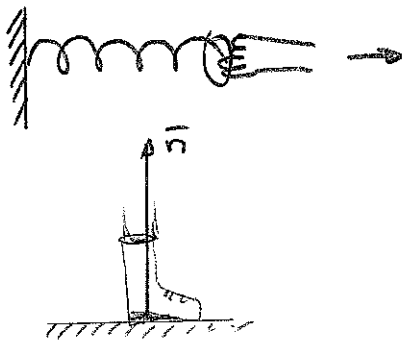
Kraftbegreppet:

Vi har väl alla en intuitiv uppfattning, baserad på våra vardagliga erfarenheter, om vad krafter är för något.

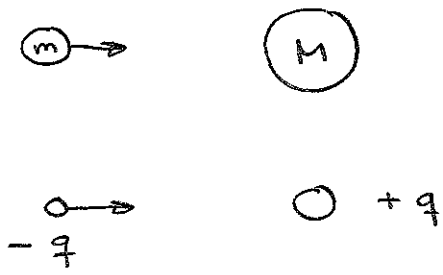
Man brukar ibland dela upp krafter i två klasser; kontaktkrafter och fältkrafter.

Krafter som är man drar i en fjäder, sparkar till en boll eller står på ett golv känner vi av kontaktkrafter. Tyngdkraften, magnetiska och elektriska krafter förutsätter ju inte kontakt mellan kroppar och de kallas därför fältkrafter. Denna uppdelning kan vara en hjälp, men egentligen kan man inte dela upp krafter på detta sätt. Kontaktkrafterna åstadkoms av fältkrafter på atomär nivå. Det som hindrar att du sjunker igenom golvet är fältkrafter mellan atomerna längst ut på dina skosulor och atomerna i golvytan.

Krafter är vektorer. De bestäms av såväl riktning som belopp.



kontaktkrafter



fältkrafter

Newtons lagar:

1. Tröghetslagen.
   Om ett objekt inte växelverkar med andra objekt, så är det möjligt att identifiera ett koordinatsystem i vilket objektet har accelerationen noll.

   eller

   I avsaknad av yttre krafter befinner sig ett objekt i vila eller rör sig med konstant hastighet när det betraktas från icke accelererat koordinatsystem.

2. Accelerationen hos ett objekt är direkt proportionell mot nettokraften som verkar på det och omvänt proportionell mot objektets massa. Den vanligaste formen av Newtons andra lag är

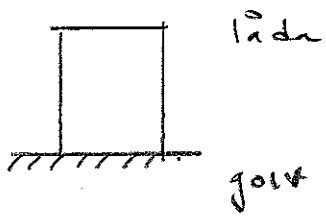
$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

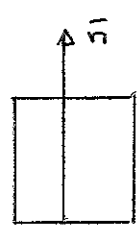
   Den formen förutsätter att objektets massa är konstant.

3. Om två objekt växelverkar med varandra gäller

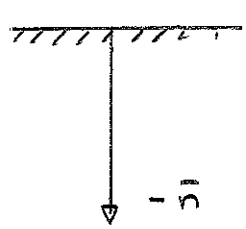
$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

   där $\mathbf{F}_{12}$ är den kraft som objekt 1 verkar med på objekt 2 och $\mathbf{F}_{21}$ är den kraft som objekt 2 verkar med på objekt 1.





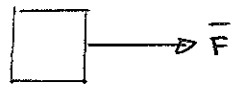
$\bar{n}$ = kraft på lådan orsakad av växelverkan med golvet



$-\bar{n}$ = kraft på golvet orsakad av växelverkan med lådan.

Tillämpningar av Newtons lagar:

Ingen rotation.
Nu i mekanikkursens början studerar vi egentligen objekt som saknar utsträckning. För att göra framställningen lite mer färgstark är exemplen fyllda med bilar, lådor, personer och annat som har utsträckning och som kan rotera. I exempel som följer kommer vi att se till att krafter appliceras så att föremålen inte roterar, utan bara translateras.

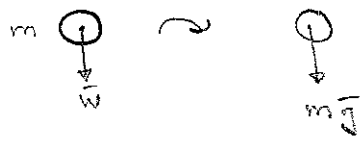


Snören.
I problemen förekommer ofta snören. De förutsätts vara otänjbara och masslösa. Spännkrafter i snören brukar betecknas med **T** eller **S.**

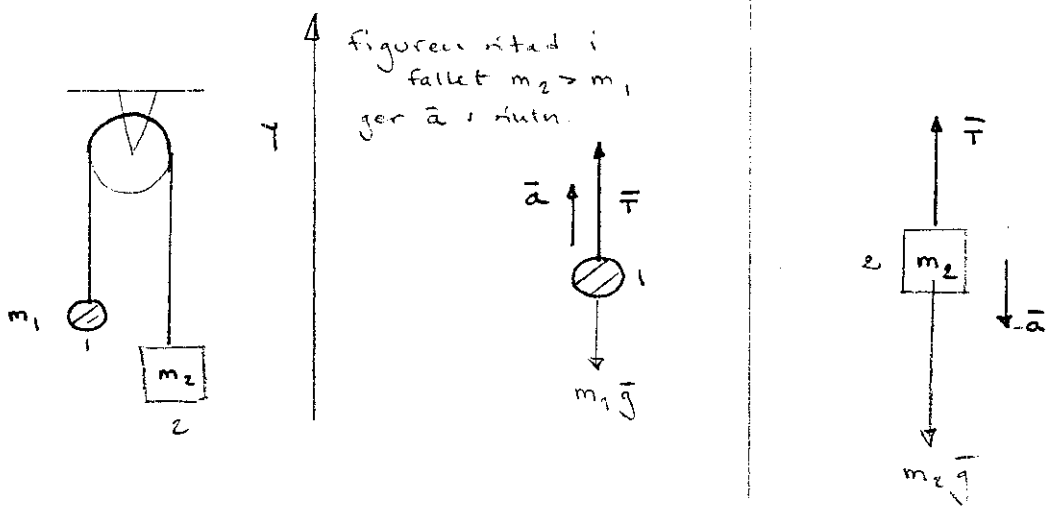
Trissor.
De trissor som förekommer i början av kursen är masslösa och de har dessutom helt friktionsfria ytor. Det senare innebär att snören som ligger på dem kan glida på trissan utan att den börjar rotera. Senare i kursen kommer vi att ta hänsyn till trissornas rotation.

Friläggning.
Ett mekanikproblem består ofta av flera delkroppar som växelverkar med varandra. En mycket effektiv metod för att lösa sådan problem är FRILÄGGNING. Det innebär att man ritar en figur för varje delkropp och studerar de krafter som verkar på den kroppen. Ibland, men inte så ofta, kan det vara svårt att sätta lämpliga gränser för friläggningen. En kloss består av atomer, men vi avstår från att frilägga varje atom. För att bestämma accelerationen som två klossar som är i kontakt med varandra får av en yttre nettokraft, kan man behandla de två som en enda enhet. Om man däremot är intresserad av kontaktkraften mellan klossarna måste man frilägga dem.

Tyngkraften.
Newtons andra lag F = ma säger att närvaron av en nettokraft leder till en acceleration. ma är inte någon kraft utan resultatet av en nettokraft. När det gäller en kropp som utsätts för en tyngdkraft skulle vi egentligen beteckna denna med w (weight), men något oegentligt kommer vi att beteckna den med mg, som ju egentligen inte är kraften utan är massan multiplicerad med den acceleration som kroppen skulle få om den föll fritt.



i) Atwoods maskin



$$(1) \quad \Sigma F_y = T - m_1 g = m_1 a_1 = m a$$

$$(2) \quad \Sigma F_y = T - m_2 g = -m_2 a_2 = -m_2 a$$

2 obekanta T och a
2 ekvationer

(1) − (2)

$$\Rightarrow \quad -m_1 g + m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$\Rightarrow \quad a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

Insättning av detta ger

$$T = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

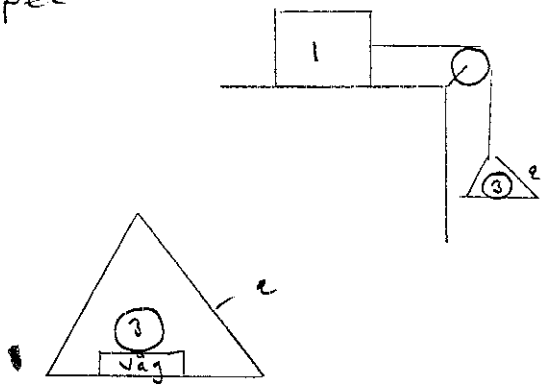
$m_1 = m_2 \Rightarrow a = 0$ samt $T = mg$

rimligt!

$$(1) \quad m_1 \ddot{Y}_1 \hat{Y} = \bar{T}_1 \hat{Y} - g m_1 \hat{Y}$$

$$(2) \quad m_2 \ddot{Y}_2 \hat{Y} = \bar{T}_2 \hat{Y} - g m_2 \hat{Y}$$

Exempel:



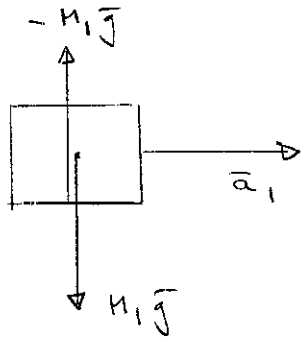
Givet: $M_1 = 2{,}0$ kg
$M_2 = 3{,}0$ kg
$M_3 = 1{,}0$ kg

ingen friktion
snöret otänjbart
masslös trissa utan friktion
vågen masslös.

Sökt: accelerationen och vågens utslag.

Lösning:

Frilägging 1):



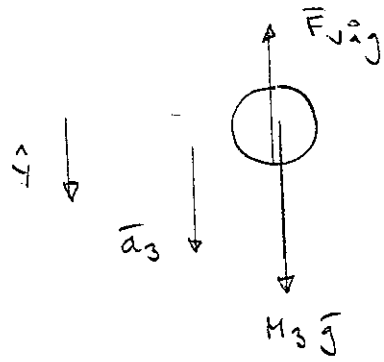
$\bar{S}_1$ = spännkraften i snöret

$\bar{S}_1 = M_1\bar{a}_1$ $\qquad \bar{S}_1 \parallel \bar{a}_1$

$$\boxed{S_1 = M_1 a_1}$$

2) vänta lite

3)



$$M_3\bar{g} + \bar{F}_{våg} = M_3\bar{a}_3$$

$$M_3 g\hat{y} + F_{våg}(-\hat{y}) = M_3 a_3 \hat{y}$$

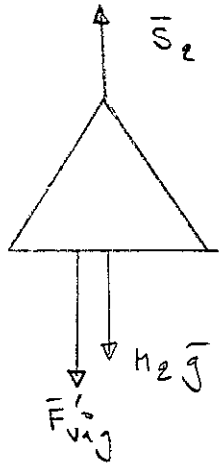
$$\Rightarrow \boxed{M_3 g - F_{våg} = M_3 a_3}$$

Nu 2:

$$\bar{F}'_{våg} = F_{våg}\hat{y}$$

friktionslös yta på trissan

$$\bar{S}_2 = S_2(-\hat{y}) = S_1(-\hat{y})$$



$$M_2\bar{g} + \bar{F}'_{våg} + \bar{S}_2 = M_2\bar{a}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{M_2 g + F_{våg} - S_1 = M_2 a_2}$$

otänjbart snöre $\Rightarrow |\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = |\bar{a}_3| = a$

Vi har tre ekvationer och tre obekanta. Lösbart.

$$\begin{cases} S_1 = M_1 a & (1) \\ M_2 g + F_{våg} - S_1 = M_2 a & (2) \\ M_3 g - F_{våg} = M_3 a & (3) \end{cases}$$

$S_1 = M_1 a$ och (2) + (3) ger

$$(M_2 + M_3)\, g - M_1 a = (M_2 + M_3)\, a$$

Detta hade vi kunnat sätta upp direkt.

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\, g} = \frac{3+1}{6}\, g = \frac{2}{3}\, g$$

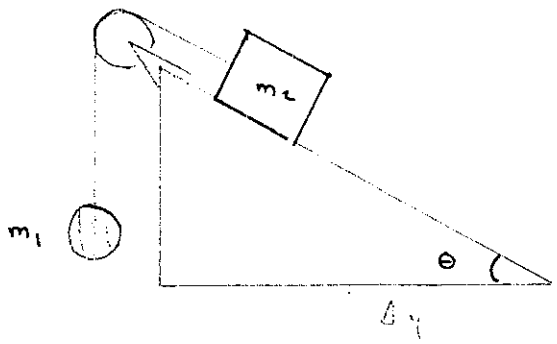
sätt in i (3)

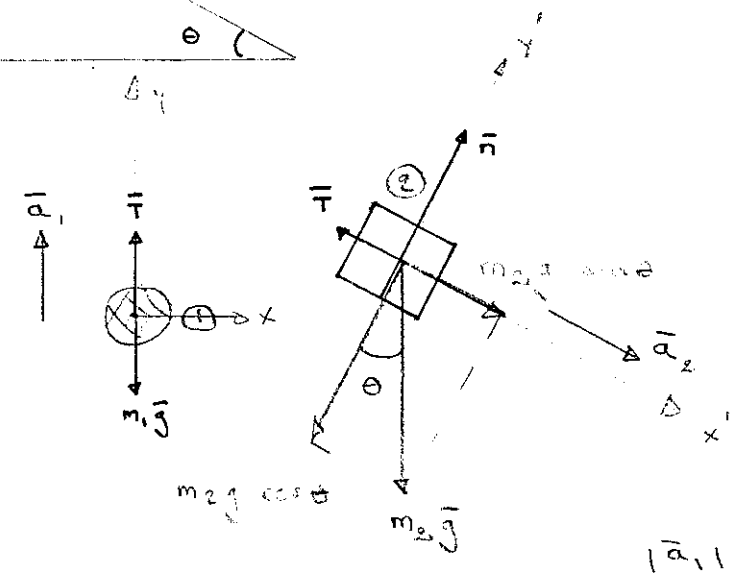
$$\Rightarrow M_3 g - F_{våg} = M_3 \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\, g$$

$$\Rightarrow F_{våg} = M_3 g - M_3 \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\, g = \frac{M_1 \cdot M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\, g =$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{6}\, g = \frac{1}{3}\, g$$

dvs om vågen är graderad på vanligt sätt så visar den 1/3 kg. Massan 3 är 1 kg.





$|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = a$

1

(1) $\sum F_x = 0$

(2) $\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a$ 1 uppåt om $T > m_1 g$

2 (3) $\sum F_{x'} = m_2 g \cdot \sin\theta - T = m_2 a$

(4) $\sum F_{y'} = n - m_2 g \cos\theta = 0$

ekv (2) och (3) (2st) innehåller 2 obekanta T och a

(2) ger $T = m_1 a + m_1 g$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{m_2 g \cdot \sin\theta - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

och vidare

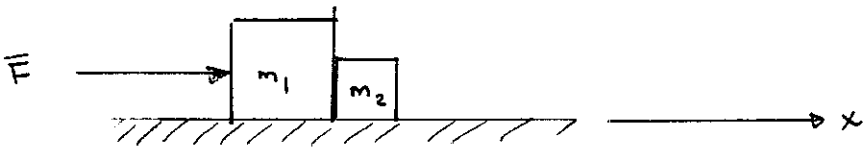
$$T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin\theta)}{m_1 + m_2}$$

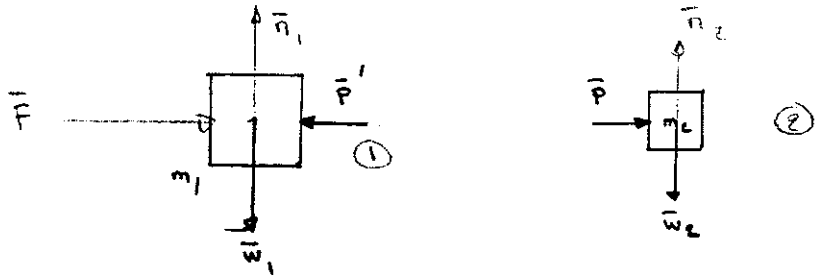
sätt in $\theta = 45°$ och $m_1 = 10{,}0$ kg och $m_2 = 5{,}0$ kg

$\Rightarrow a = -4{,}22$ m/s² dvs 1 åt sig nedåt

och 2 uppåt (snett

iv) Ett block skjuter ett annat framåt sig.





Samma acceleration för båda blocken $\bar{F}$ är den enda påtagda kraften i x-led.

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)\,a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2}}$$

Bestäm kontaktkraften!

(2): $\sum F_x = P = m_2 a \Rightarrow$ (se ovan) $P = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F$

Kolla med (1)!

$$\sum F_x = F - P' = F - P = m_1 a$$

$$\Rightarrow P = F - m_1 a = (\text{se ovan}) = F - \frac{m_1}{m_1 + m_2} F =$$

$$= \frac{m_1 F + m_2 F - m_1 F}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F \quad \text{stämmer!}$$

Siffror: $m_1 = 2\,kg$ $m_2 = 1\,kg$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2+1} F = \frac{1}{3} F$$

[illegible]

$m_1 = 1\,kg$ $m_2 = 2\,kg$

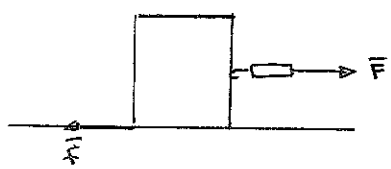
$$\Rightarrow P_2 = \frac{2}{1+2} F = \frac{2}{3} F \qquad P_2 \neq P_1 !$$

Friktion:

Ett föremål som har kontakt med omgivningen växelverkar med den på olika sätt. Friktion, motstånd mot rörelse eller försök till rörelse, beror på sådan växelverkan. Friktionen kan vara det som vi kallar luftmotstånd eller den kraft som vill förhindra rörelsen när två föremål glider mot varandra. Friktion kan också möjliggöra en viss rörelse. Exempel på detta är när en bil kör i en kurva. Ett annat är att friktionen möjliggör fartökning när vi trampar hårt på cykelpedalerna. Friktion påverkar oss i vardagen högst påtagligt.
Friktionen uppstår genom växelverkan mellan atomerna i gränsytan mellan material och det är inte enkelt att räkna ut hur stor den är. Dess storlek beror främst av två faktorer; dels ytornas topografi d v s om de är jämna eller släta, dels vilka atomslag som har kontakt med varandra.

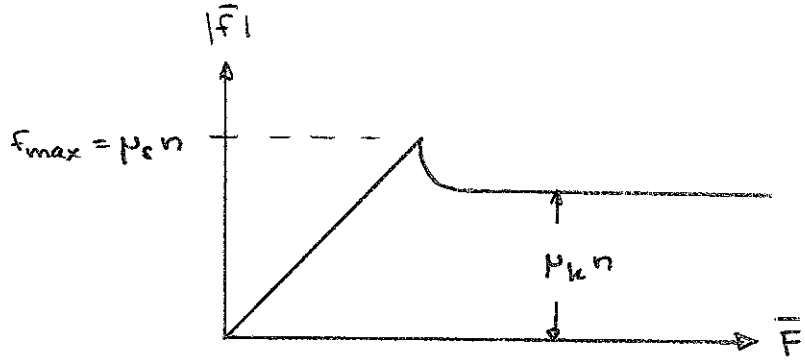
Friktionen mellan två kroppar beskrivs med friktionskoefficienten. Det finns två slags friktionskoefficient; den statiska (μ_s)och den dynamiska (μ_k). Den statiska är tillämpbar när ett föremål är i vila relativt omgivningen medan den dynamiska används när två föremål glider i förhållande till varandra.

Ett sätt att bestämma dessa koefficienter för exempelvis en låda av trä som vilar på ett horisontallt underlag av glas, är att göra följande experiment:



Vi fäster en dynamomenter (kraftmätare) i lådan och börjar dra i denna med en extern horisontell kraft. När vi drar lite försiktigt rör sig inte lådan alls. Detta måste bero på att det uppstår en friktionskraft på lådan som är lika stor som den kraft som vi drar med och som är motriktad denna. Med hjälp av dynamometern avläser vi den kraft som vi dra med. Därefter ökas den externa kraften och vi gör avläsningar. När vi har kommit upp till en viss kraft börjar lådan plötsligt att röra sig. När den har börjat röra sig noterar vi den kraft som krävs för att lådan ska röra sig med olika konstanta farter. Vi finner då att den kraften är oberoende av vilken fart som lådan har relativt underlaget. För att komplettera experimentet gör vi om det med lådor som är av exakt samma material som den första, men som har olika massor. För att få ytterligare information kan vi också göra experimentet då bordet bildar en vinkel med horisontalplanet. Med hjälp av det senare experimentet kommer vi att finna att det är normalkraften (och således inte alltid tyngden) mellan låda och glasskiva som tillsammans med friktionskoefficienterna är den viktiga faktorn.

Resultatet från detta experiment sammanfattas i nedanstående diagram.



Vi ser att friktionskraften när föremålet inte rör sig beror på hur stor den applicerade kraften är. Den är således inte konstant. Friktionskraften när föremålet har börjat röra sig är däremot (approximativt) konstant.
Den plötsliga minskningen av friktionskraften när ett föremål börjar glida är något som alla av oss har noterat. En tung möbel som vi försöker sätta i rörelse "släpper" plötsligt från golvet och börjar glida okontrollerat. När man är ute och går på vintern när det är halkigt ligger man plötsligt raklång på marken och undrar hur det kunde hända så plötsligt.

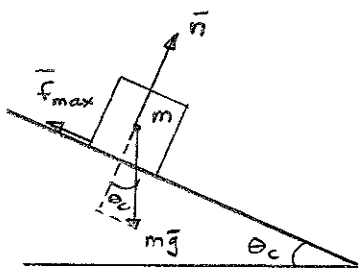
Exempel på friktionskoefficienter:

	μ_s	μ_k
Stål mot stål	0,74	0,57
Aluminium mot stål	0,61	0,47
Gummi mot betong	1,0	0,8
Glas mot glas	0,94	0,4
Is mot is	0,1	0,03
Teflon mot teflon	0,04	0,04
Vaxat trä mot blöt snö	0.14	0,1

<u>Ett enkelt experiment för att bestämma μ_s:</u>

θ_c = gränsvinkeln för glidning
ingen acceleration.

$$\left.\begin{aligned} f_{max} &= \mu_s \cdot n = mg \cdot \sin\theta_c \\ n &= mg \cdot \cos\theta_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

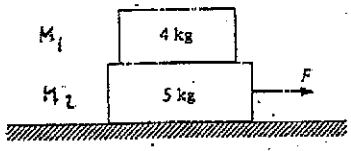


$$\Rightarrow \mu_s \cdot mg \cdot \cos\theta_c = mg \cdot \sin\theta_c \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s = \tan\theta_c}}$$

Bestäm θ_c experimentellt $\Rightarrow \mu_s$

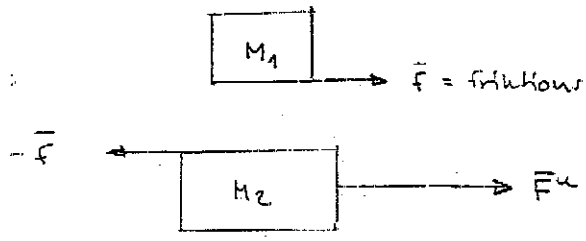
Några exempel:

1. Ett block (m_1=4,0 kg) vilar ovanpå ett annat block (m_2=5,0 kg) som i sin tur vilar på ett friktionsfritt underlag. Friktionskoefficienten mellan de två blocken är sådan att de börjar glida relativt varandra när en horisontell kraft F_1=27 N appliceras på den <u>undre</u> blocket såsom i figuren.
Antag att den horisontella kraften istället appliceras på det <u>övre</u> blocket. Hur stor kan då den horisontella kraften vara om inte blocken ska glida relativt varandra?



<u>Lösning:</u>

a) Med kraft F^u på undre blocket:



gränsfall: $f \le \mu M_1 g$

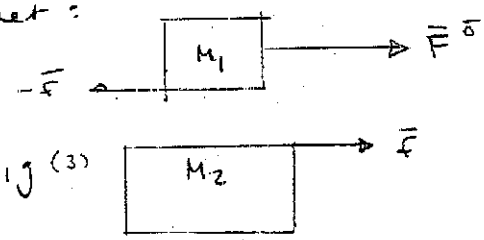
$$\begin{cases} M_1 \ddot{x} = f_{max} = \mu M_1 g & (1) \\ M_2 \ddot{x} = F^u_{max} - f_{max} = F^u_{max} - \mu M_1 g & (2) \end{cases}$$

(1) ger $\ddot{x} = \mu g$, insätter i (2)

$$\Rightarrow M_2(\mu g) = F^u_{max} - \mu M_1 g \quad \Rightarrow F^u_{max} = (M_1 + M_2)\mu g$$

(eftersom F^u_{max} är känd skulle vi nu kunna beräkna μ)

b) Yttre kraft på det övre blocket:



gränsfall

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x} = F^o_{max} - f_{max} = F^o_{max} - \mu M_1 g & (3) \\ M_2 \ddot{x} = f_{max} = \mu M_1 g & (4) \end{cases}$$

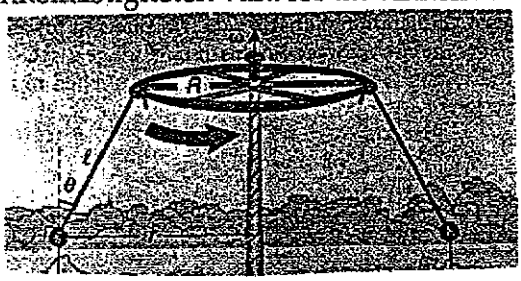
(4) ger $\ddot{x} = \frac{M_1}{M_2}\mu g$, insätter i (3)

$$\Rightarrow M_1\left(\frac{M_1}{M_2}\mu g\right) = F^o_{max} - \mu M_1 g \quad \Rightarrow F^o_{max} = \frac{M_1}{M_2}(M_1 + M_2)\mu g$$

$$\therefore \frac{F^o_{max}}{F^u_{max}} = \frac{\frac{M_1}{M_2}(M_1+M_2)\mu g}{(M_1+M_2)\mu g} = \frac{M_1}{M_2} \quad \Rightarrow F^o_{max} = \frac{M_1}{M_2} F^u_{max}$$

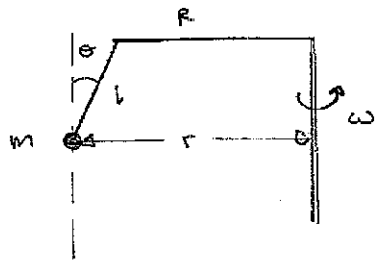
$$\Rightarrow F^o_{max} = \frac{4}{5} F^u_{max} = \frac{4}{5}\, 27 = 21{,}6 = \underline{\underline{22\ N}}$$

2 Anordningen i figuren nedan består av ett cirkulärt hjul med radie R och ett rep med längden l som roterar en person i horisontalplanet med konstant vinkelhastighet
Hur stor ska vinkelhastigheten vara för att vinkeln θ skall vara 30 grader om R = 2,0 m och l = 3,0 m?



(4 p)

Lösning:

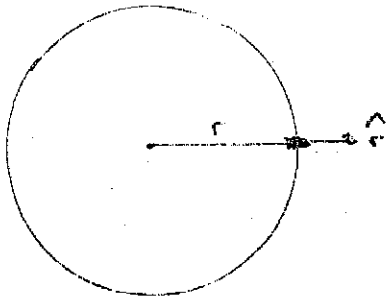


Givet: $\theta = 30°$
$R = 2{,}0$ m
$l = 3{,}0$ m

Sökt: ω

m beskriver en cirkulär centralrörelse med radien r och konstant fart = v $\Rightarrow$ acceleration $\bar{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$

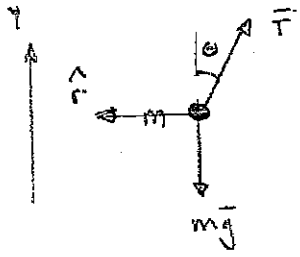
$\bar{a}_\theta = 0$



$r = R + l \cdot \sin\theta$

$v = \omega r$

Det måste då finnas krafter som kan ge upphov till den accelerationen. De krafter som kan komma i fråga i detta fall är tyngdkraften och spännkraften i repet.



acceleration i y-led = 0

$\Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$

$\Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$ (1)

acceleration i r-led $= \frac{v^2}{r}$

$\Rightarrow T \cdot \sin\theta = m\frac{v^2}{r} = m\frac{(\omega r)^2}{r} = m\omega^2 r$

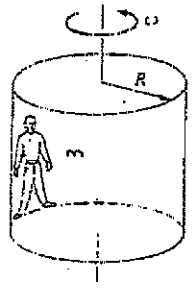
sätt in (1) i (2) $\Rightarrow mg \cdot \tan\theta = m\omega^2(R + l\sin\theta)$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g\tan\theta}{R + l\sin\theta}$ $\theta = 15°$ $\Rightarrow$

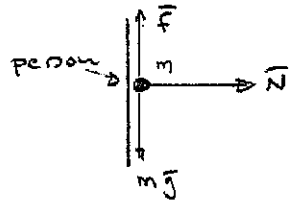
$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot \tan 15°}{2{,}0 + 3{,}0\sin 15°}} = \underline{\underline{1{,}27 \text{ rad/s}}}$

3 "Spinning Terror" är en nöjesfältsattraktion som består av en stor vertikal trumma som roterar så fort att alla som befinner sig inne i den blir hängande mot väggen när golvet tas bort. Antag att friktionskoefficienten mellan väggmaterialet och tyg är 0,3 och att trumman har en radie som är 2,0 m. Hur stor måste då rotationshastigheten uttryckt i antal varv per sekund minst vara för att golvet ska kunna tas bort utan att de som befinner sig i trummar ramlar ner?

Lösning:



Sett från sidan



För att personen ska kunna hänga kvar på väggen när golvet tas bort måste det gälla att

$$|\bar{f}| = |m\bar{g}| \quad \text{el} \quad f = mg$$

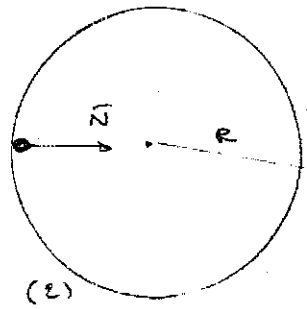
Friktionskraften $\bar{f}$ har ett belopp enligt

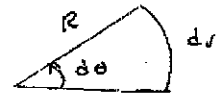
$$f \leq \mu N \quad \text{el} \quad mg \leq \mu N \qquad (1)$$

Sett ovanifrån:

Normalkraften $\bar{N}$ gör det möjligt att ha en acceleration mot cirkelns mitten, vars belopp är v^2/R och där

$$N = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R \qquad (2)$$





$ds = R \cdot d\theta$

$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = v = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$

$\therefore v = \omega R$

ω = vinkelhastigheten (rad/s)

(1) och (2) ger

$$mg \leq \mu m\omega^2 R$$

$$\Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{\mu R}$$

$$\therefore \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu R}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}3 \cdot 2}} = 4{,}0 \text{ rad/s}$$

ett varv/s = 2π rad/s

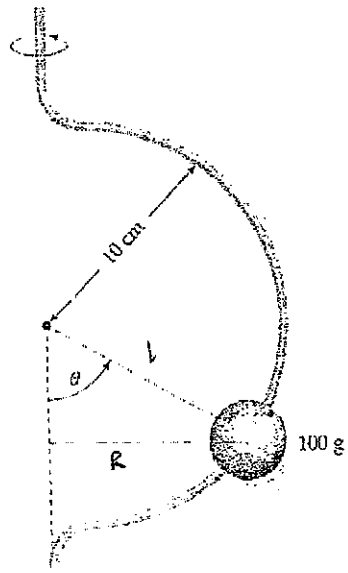
$\Rightarrow$ 4,0 rad/s motsvarar $\frac{4{,}0}{2\pi} = \underline{\underline{0{,}64 \text{ varv/s}}}$

4 En liten pärla med massan 100 g längs en tråd som formats som en halvcirkel med radien 10 cm enligt figuren nedan. Tråden roterar med hastigheten 2,0 varv per sekund

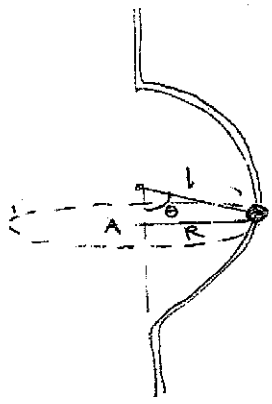
20

Bestäm det värdet på vinkeln θ som är sådant att pärlan kommer att ha ett stationärt läge i förhållande till den roterande tråden. Varför är ett sådant att söka endast för vinklar som är mindre än 90 grader?

Självklart ritar du en tydlig figur där de krafter som verkar på pärlan klart framgår.



Lösning: Pärlan beskriver en cirkulär centralrörelse med radien R och den konstanta farten $v = \omega R$



Givet: $l = 10$ cm, ($m = 100$ g), $f = 2$ varv/s

$\omega = 2\pi \cdot f$

$R = l \cdot \sin\theta$

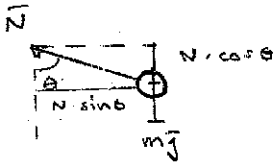
kraft → accel av massa

$\bar{F} = m\bar{a}$

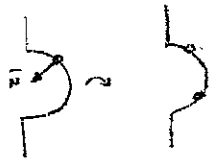
Ingen acceleration i y-led:

$\Rightarrow N\cos\theta - mg = 0$ (1)

Frilägging av pärlan:



Endast vinklar $\theta \in [0°, 90°]$ ger $\bar{N}$ som har en komponent som är motriktad $m\bar{g}$



cirkulär centralrörelse med acceleration v^2/R riktad mot A

$\Rightarrow N \cdot \sin\theta = m\frac{v^2}{R}$ (2)

$v = \omega R = \omega l \cdot \sin\theta$

$\Rightarrow$

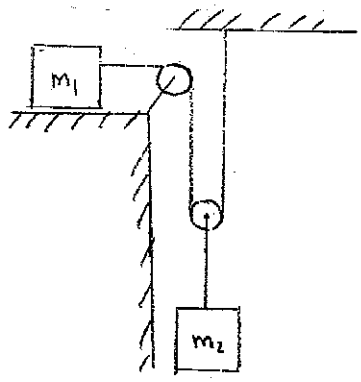
$\Rightarrow N \sin\theta = m\frac{\omega^2 R^2}{R} = m\omega R = m\omega^2 l \sin\theta$

men (1) ger $N = \frac{mg}{\cos\theta}$

$\Rightarrow mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = m\omega^2 l \sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}$

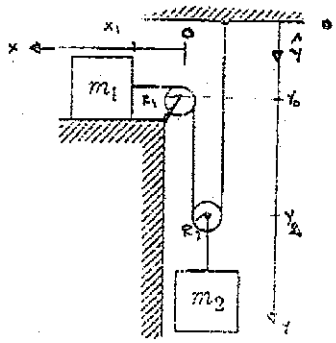
$\Rightarrow \theta = \arccos\frac{9{,}81}{(2\pi\, 2{,}0)^2 \cdot 0{,}10} = 51{,}6° = \underline{\underline{52°}}$

5 Bestäm accelerationen (uttryck gärna i procent av g och ta dig en ordentlig funderare på om svaret är rimligt) hos de båda kropparna i figuren nedan om $m_1 = 4{,}0$ kg och $m_2 = 6{,}0$ kg. Trissan är såväl friktionsfri som masslös och snöret är otänjbart och masslöst. Underlaget som m_1 glider på är friktionsfritt.



Lösning:

Relation mellan accelerationen hos m_1 och m_2:



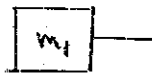
snörets längd $= l$

$$l = x_1 + \tfrac{1}{2}\pi R_1 + (y_2 - y_0) + y_2$$

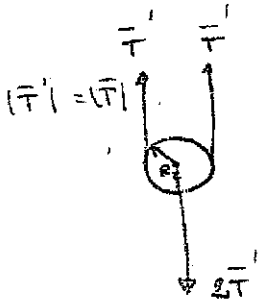
$$\Rightarrow 0 = \ddot{x}_1 + 2\ddot{y}_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -2\ddot{y}_2$$

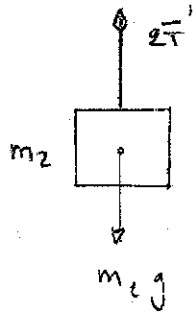
blocket m_2 har samma acceleration som trissan med radien R_2

Frilägganden:



$$\left.\begin{array}{l} \bar{T} = -T\,\hat{x} \\ \ddot{\bar{x}}_1 = \ddot{x}_1\,\hat{x} \end{array}\right\} \Rightarrow -T = m_1\ddot{x}_1 = -2m_1\ddot{y}_2 \quad (1)$$





y-axeln pekar neråt: $2\bar{T}' = 2T'(-\hat{y})$

$m\bar{g} = mg\,\hat{y}$

$$m_2 g - 2T = m_2\ddot{y}_2 \quad (2)$$

men ekv (1) ger $-2T = 2\cdot(-2m_1\ddot{y}_2)$

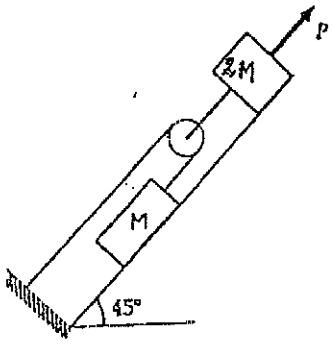
insättning i (2): $m_2 g - 4m_1\ddot{y}_2 = m_2\ddot{y}_2$

$$\Rightarrow \ddot{y}_2 = \frac{m_2}{m_2 + 4m_1}\,g = \frac{6{,}0}{6{,}0 + 4\cdot 4{,}0} = \underline{\underline{2{,}7\ \mathrm{m/s^2}}}$$

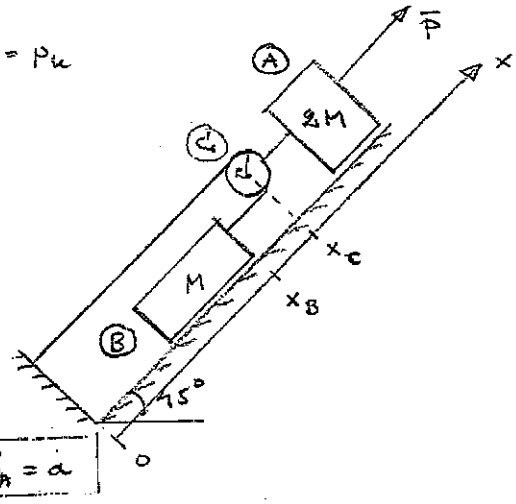
$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{x}_1 = -5{,}4\ \mathrm{m/s^2}}}$$

$$|T| = |m_1\ddot{x}_1| = 4\cdot 5{,}4 = \underline{\underline{21{,}6\ \mathrm{N}}}$$

6 Två kroppar med vardera massan M och 2M är förenade genom ett masslöst block samt placerade på ett strävt lutande plan med friktionskoefficient μ enligt figuren nedan.
Vad är relationen mellan de båda kropparnas accelerationer?
Visa att den kraft P som måste appliceras för att den undre kroppen skall få accelerationen a är lika med M (3a + g2^{3/2} (1 + μ)) (4 p)



Lösning: friktionskoefficient = $\mu = \mu_k$
acceleration // x-axeln



Relation mellan accel av A och B:

A:s accel = accel av trissan C
$\ddot{x}_A = \dot{x}_C$

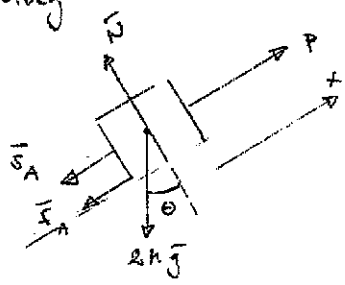
snörlängden = l

$l = x_C + \pi R + (x_C - x_B)$

$\Rightarrow 0 = \dot{x}_C + \ddot{x}_C - \ddot{x}_B \Rightarrow 2\ddot{x}_C = \ddot{x}_B \Rightarrow \boxed{2\ddot{x}_A = a}$
$\ddot{x}_B = a$

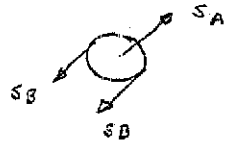
Frilägg:

A



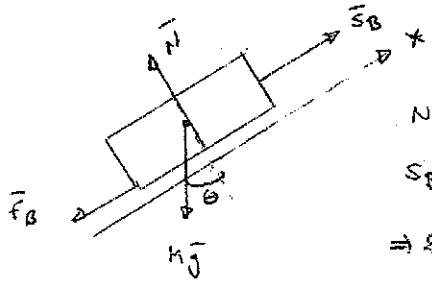
$N = 2Mg\cos\theta \Rightarrow f_A = \mu N = \mu 2Mg\cos\theta$

Newtons 2:a lag i x-led: $P - 2Mg\sin\theta - S_A - \mu 2Mg\cos\theta = 2M\ddot{x}_A$



Masslös trissa: $S_A = 2S_B$

B



$N = Mg\cos\theta \Rightarrow f_B = \mu Mg\cos\theta$

Newtons 2:a lag i x-led:

$S_B - Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta = Ma$ (2)

$\Rightarrow 2S_B = 2(Ma + Mg\sin\theta + \mu Mg\cos\theta)$

sätt in $2S_B$ (= S_A) och utnyttja att $2\ddot{x}_A = a$!

$\Rightarrow P - 2Mg\sin\theta - 2(Ma + Mg\sin\theta + \mu Mg\cos\theta) - \mu 2Mg\cos\theta = Ma$

$\Rightarrow P = 4Mg\sin\theta + \mu 4Mg\cos\theta + 3Ma$ $\quad \sin\theta = \cos\theta = 1/\sqrt{2}$ då $\theta = 45°$

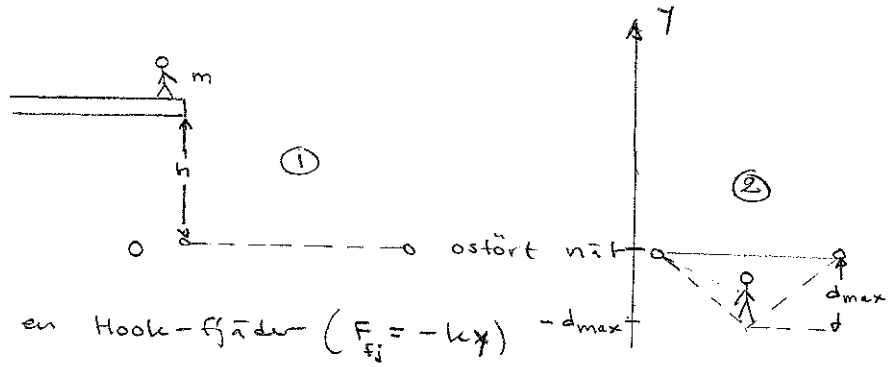
$\Rightarrow P = M\left[3a + 4Mg\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mu)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P = M\left[3a + 2\sqrt{2}g(1+\mu)\right]}$

4:37

Trapetsakrobater avslutar ofta sina nummer genom att hoppa från trapetsen ner i ett säkerhetsnät. När akrobaten står i vila i nätets mittpunkt trycks denna ner sträckan d_1. Man kan anta att nedtryckningen är proportionell mot den kraft varmed akrobaten påverkar nätet. Hur stor blir den största nedtryckningen, om akrobaten hoppar från höjden h över nätet?

Lösning:



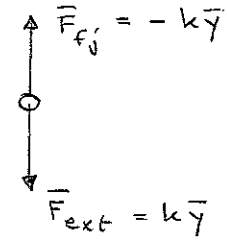
Vi betraktar nätet som en Hook-fjäder ($F_{fj} = -ky$)

Den potentiella energin i gravitationsfältet sätts exempelvis i nivå med det ostörda nätet.

Genom att betrakta nätet som en ideal fjäder kan vi utgå ifrån att den mekaniska energin bevaras.

① $E_{tot} = mgh$

② $E_{tot} = -mgd_{max} + W$ ← arbete vid uttänjn av nätet. ($0 \to -d_{max}$) utr. av $F_{ext} = mg = -F_{fj}$



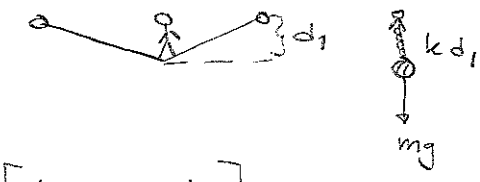
$$W = \int_0^{-d_{max}} k\bar{y}\cdot d\bar{y} = \int_0^{-d_{max}} ky\hat{y}\cdot dy\hat{y} = \int_0^{-d_{max}} ky\cdot dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2}ky^2\right]_0^{-d_{max}} = \frac{1}{2}kd_{max}^2$$

$$\Rightarrow E_{tot} = -mgd_{max} + \frac{1}{2}kd_{max}^2 = mgh$$

$$\Rightarrow d_{max}^2 - \frac{2mg}{k}d_{max} - \frac{2mg}{k}h = 0$$

men: $mg = kd_1 \Rightarrow k = \frac{mg}{d_1}$



$$\therefore d_{max}^2 - 2d_1d_{max} - 2d_1h = 0$$

$$\Rightarrow d_{max} = d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + 2d_1h} = [d_{max} > d_1]$$

$$= d_1\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{h}{d_1}}\right)$$

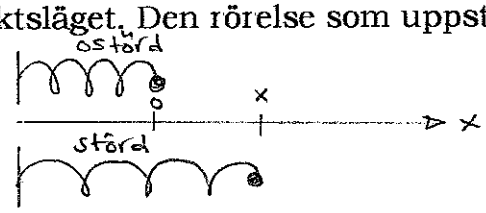
med $h = 6\,m$, $d_1 = 1\,m \Rightarrow d_{max} = 4{,}6\,m$

Svängningsrörelser.

För att ni ska få bättre förutsättningar när ni gör laborationen Svängningar hoppar vi framåt i boken till kapitlet om svängningar. Detta kapitel innehåller en del som förutsätter kunskaper om stela kroppars mekanik. Sådana har vi inte inhämtat i den här kursen ännu, så dessa tillämpningar får anstå till senare.
Svängningar innebär mer eller mindre komplicerad periodisk rörelse. Vi redan har stött på några sådana i kursens första del när vi har studerat fjädrar och enkla pendlar.

Harmoniska svängningar:

En speciell typ av periodisk rörelse uppstår när den kraft som verkar på en partikel alltid är riktad mot jämviktsläget och när storleken på denna kraft är proportionell mot avvikelsen från jämviktsläget. Den rörelse som uppstår då kallas ENKEL HARMONISK RÖRELSE.



Fjädersvängningar:

Vi återvänder nu till Hookfjädern och studerar rörelser i horisontalplanet. Vi bortser från friktion.

Den återförande kraften ges av

$$F_s = kx$$

k är kraftkonstanten eller fjäderkonstanten och mäts i enheten N/m.

Låt nu en partikel med massan m vara förbunden med fjädern. När partikeln befinner sig på avståndet x från jämviktsläget ges dess acceleration av Newtons andra lag

$$F_s = kx = ma$$

Vilket ger

$$a = -(k/m)\,x$$

Vi har alltså:

$$d^2x/dt^2 = -(k/m)\,x$$

Såväl sinus- som cosinusfunktionen är tänkbara lösningar till denna differentialekvation.

Vi väljer nu följande form för lösningarna

$$x(t) = A\cos(\sqrt{k/m}\,t + \Phi)$$

Vi ser att k/m bestämmer hur snabbt funktionen ändrar sig i tiden. För att förenkla framtida skrivning inför vi en konstant ω, som kallas <u>vinkelhastigheten</u> och som definieras

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Nu kan vi skriva

$$x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

A och ω är konstanter. A är maximala avvikelsen från jämviktsläget och kallas <u>amplituden</u>. Φ kallas <u>faskonstanten</u>. $(\omega t + \Phi)$ är <u>fasen</u> hos rörelsen.

Vi kan nu derivera x(t) en och två gånger och får då:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Vi ser att

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$$

<u>Perioden</u> T är den tid som det tar för partikeln att att gå igenom en full cykel av sin rörelse. Det innebär den tid T som det tar för att öka fasen med 2π. D v s

$$(\omega(t + T) + \Phi) - (\omega t + \Phi) = 2\pi$$

vilket innebär

$$\omega T = 2\pi \quad \text{eller} \quad T = 2\pi/\omega$$

<u>Frekvensen</u> f är antalet cykler per tidsenhet dvs

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$

För just fjädersvängningar gäller: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

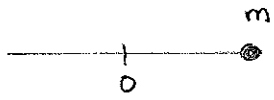
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A \qquad a_{max} = \frac{k}{m}\,A$$

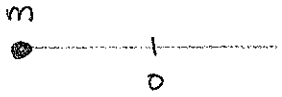
<u>Bestämning av faskonstanten Φ:</u>

Fastkonstanten kan anta vilket värde som helst. Värdet beror på randvillkor såsom läge och hastighet vid exempelvis tiden t = 0.
Om vi väljer att "sätta igång" tiden vid något av vändlägena eller när partikeln passerar x = 0 får vi:

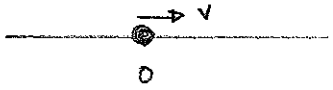
x = A då t = 0 ger: $x(0) = A\cos\Phi = A$ dvs $\Phi = 0$



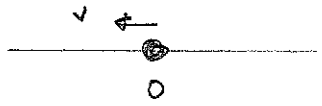
x = -A då t = 0 ger: $x(0) = A\cos\Phi = -A$ dvs $\Phi = \pi$



x = 0 och v > 0 då t = 0 ger: $x(0) = A\cos\Phi = 0$ och
$v(0) = -\omega A \sin\Phi > 0$ dvs $\Phi = -\pi/2$



x = 0 och v < 0 då t = 0 ger: $x(0) = A\cos\Phi = 0$ och
$v(0) = -\omega A \sin\Phi < 0$ dvs $\Phi = \pi/2$



Energi hos enkla harmoniska svängningar:

Energin för en masspartikel som utför en horisontell fjädersvängning består av två delar; en kinetisk och en potentiell. Om vi antar att fjädern är masslös får vi:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\left(\frac{k}{m}\right)A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{1}{2}kA^2$$

Vändläget: $E = U = \frac{1}{2}kA^2$

$x = 0 \quad E = K_{max} = \frac{1}{2}kA^2$ ty $U = 0$.

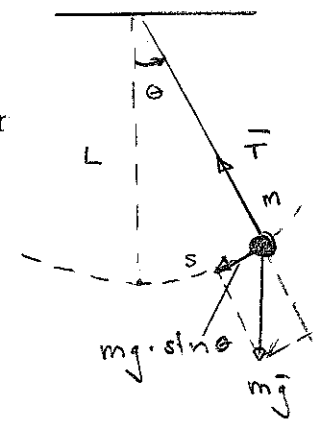
Den enkla pendeln:

Den pendel som visas i figuren består av ett masslöst och otänjbart snöre och en partikel (försumbar utsträckning) vars massa är m.

På partikeln verkar två krafter; spännkraften i snöret och tyngdkraften. Den tangentiella komponenten av tyngdkraften verkar som en återförande kraft.

Vi kan nu använda Newtons andra lag för att ställa upp rörelseekvationen:

$$F_t = ma_t \Rightarrow -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$



s är läget utefter den cirkelformade bågen. Eftersom snörlängden L är konstant har vi sambandet

$$s = L\theta$$

Vi kan nu skriva om ekvationen enligt $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$

För små vinklar gäller $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$

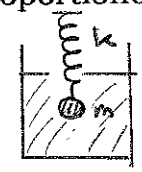
vilket ger $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{L}\theta$

Nu känner vi igen strukturen på differentialekvationen och kan skriva:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{och} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dämpade svängningar:

I en verklig svängningsrörelse har man ett motstånd som är proportionellt mot hastigheten.



$$\mathbf{B} = -b\,\mathbf{v}$$

Exempel på detta är den kraft som uppstår på grund av att det medium som kroppen rör sig i har en viskositet. Som exempel kan vi ta en fjädersvängning i en fluid (d v s en vätska med påtaglig förmåga att strömma).
Nettokraften består då av två delar; den återförande kraften i fjädern samt den kraft som är proportionell mot partikelns hastighet.

Newtons andra lag ger oss

$$\Sigma F_x = -kx - bv = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Om den resistiva kraften från fluiden är liten ($b^2 < 4\,mk$) så är lösningen till differentialekvationen:

$$x = A e^{(-b/2m)t} \cos(\omega t + \phi)$$

Vinkelfrekvensen ges av

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

När den resistiva kraften är relativt liten utför partikeln fortfarande en oscillerande rörelse, men amplituden minskar successivt. Denna typ av system kallas en <u>underdämpad oscillator.</u>

Det är praktisk att skriva om uttrycket för vinkelfrekvensen enligt:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

där ω_0 är vinkelfrekvensen för den odämpade oscillatorn.

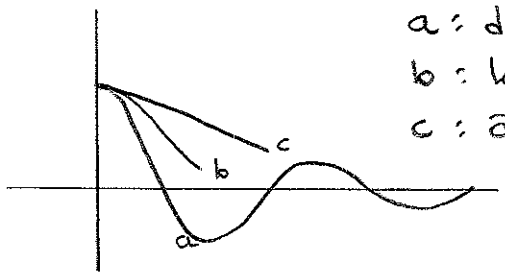
När b ökar och når ett kritiskt värde b_c så att

$$b_c/2m = \omega_0$$

oscillerar inte systemet längre och sägs vara <u>kritiskt dämpat</u>. Det återgår till utgångsläget längs en kurva som är exponentiell.

Om $b_c/2m > \omega_0$

Är systemet <u>överdämpat</u> återvänder systemet till utgångsläget, men efter längre tid än om det är kritiskt dämpat.
Dämpning innebär att den mekaniska energin minskar som en följd av värmeförluster.



a: dämpad osc.
b: kritiskt dämpad osc.
c: överdämpad osc.

Tvungna svängningar:

Om vi låter en yttre kraft utföra ett arbete på systemet får vi en ny situation. Om den yttre kraften varierar periodiskt med vinkelfrekvensen ω så att

$$F = F_0 \cos \omega t$$

Får vi en ny differentialekvation:

$$F_0 \cos \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Efter tillräckligt lång tid, så lång att den tillförda mekaniska energin är lika med värmeförlusterna får lösningarna följande utseende:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

där amplituden A ges av

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

ω_0 är egenfrekvensen hos den odämpade oscillatorn.

Figuren visar A som funktion av den pålagda kraftens vinkelfrekvens för olika värden på dämpningskonstanten b. Som synes blir amplituden särskilt stor om den pålagda kraftens vinkelfrekvens ω överensstämmer med egenfrekvensen ω_0.