Energi och energiöverföring - Arbete:

Energibegreppet är av central betydelse i många sammanhang. Varje fysikalisk process innehåller energiutbyte och energiomvandling.
I mekaniken innebär införandet av energi bland annat att vi får ett verktyg som kan förenkla beräkningarna. I värmeläran spelar energibegreppet en viktig roll och därför behöver vi lära oss en del om arbete.

System:

Vi har redan studerat problem i mekaniken där vi har definierat ett "system". Ett sådant kan vara en enda partikel, en samling partiklar, en del av rummet.
För att räkna ut energin hos ett system är det viktigt att hålla reda på de krafter som verkar på det. Det är endast externa krafter som spelar roll, interna krafter gör det inte.

Arbete:

Det infinitesimala arbetet dW som kraften **F** uträttar när dess angreppspunkt flyttas sträckan d**r** ges av:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \quad d\mathbf{r} \ \cos\theta = F\, dr \cos\theta \quad \text{(enhet: Nm eller J)}$$

Arbetet dW ges alltså av skalärprodukten av kraften och förflyttningen.
I specialfallet då kraft och förflyttning är parallella får vi:

$$dW = F\, dr$$

För att räkna ut hur mycket arbete W som kraften F uträttar vid en förflyttning från startpunkten i till slutpunkten f gäller:

$$W = \int_i^f dW = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Om kraften är konstant (d v s har såväl konstant belopp som konstant riktning) får vi:

$$W = F\, \Delta r \cos\theta$$

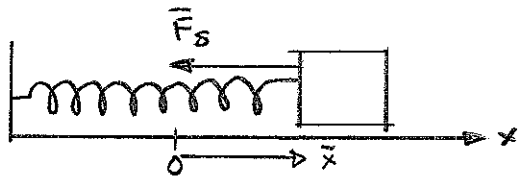
Ett exempel på en kraft som har denna egenskap är tyngdkraften. Självklart är detta en approximation, men vi små förflyttningar en mycket god sådan.
Nu ska vi studera ett viktigt fall när kraften inte är konstant till sitt belopp.

Arbete som uträttas av en fjäder:

Vårt modellsystem utgörs av ett block som ligger på ett horisontellt och friktionsfritt underlag. Blocket är förbundet med en fjäder. Denna fjäder är en s k Hook-fjäder, vilket innebär att fjäderkraftens belopp är proportionellt mot fjäderns avvikelse från sitt ostörda jämviktsläge. Denna avvikelse kan vara att den är uttänjd eller ihoptryckt. Proportionalitetskonstanten kallas fjäderkonstanten och brukar betecknas med k. Enheten är N/m.

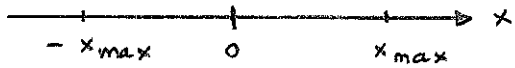
Fjäderkonstanten ges av sambandet:

$$\mathbf{F_s} = - k\,\mathbf{x}$$



x är läget för den ände av fjädern som är förbunden med blocket. Fjäderkraften strävar efter att återföra fjädern från det störda läget till jämviktsläget.

Vi tänker oss att en yttre kraft tänjer ut fjädern mycket långsamt från dess ostörda läge till ett läge x_{max} och att denna externa kraft avlägsnas. Då kommer fjäder + block att svänga fram och tillbaka mellan lägena x_{max} och $-x_{max}$ i all evighet om friktion och luftmotstånd försummas.



Det finns nu bara en enda kraft som verkar i horisontell led på blocket; fjäderkraften.
Nu kan vi räkna ut hur mycket arbete som fjäderkraften uträttar när koordinaten för fjäderns ände ändras från x_i till x_f.

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{F_s} \cdot d\mathbf{x} = \int_{x_i}^{x_f} - k\,\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \int_{x_i}^{x_f} k\,x\,(-\hat{\mathbf{i}})\,dx\,\hat{\mathbf{i}} = \int_{x_i}^{x_f} -k\,x\,dx = \tfrac{1}{2}\,k\,x_i^2 - \tfrac{1}{2}\,k\,x_f^2$$

När fjäderänden flyttas från det ostörda läget (x = 0) till läget x_{max} blir det arbete som fjäderkraften utför lika med $-\tfrac{1}{2}\,k\,x_{max}^2$, d v s negativt. Skälet till att arbetet är negativt är att kraften och förflyttningen är motriktade.

När fjäderänden flyttas från $-x_{max}$ till x_{max} uträttas arbetet noll. Under förflyttningen från $-x_{max}$ till 0 är fjäderkraft och förflyttning riktade åt samma håll, men under förflyttningen från 0 till x_{max} är de motriktade.

Den kraft som applicerades när fjädern tänjdes ut långsamt, innan den lämnades åt sig själv, kan skrivas:

$$\mathbf{F}_{app} = k\mathbf{x}$$

Det innebär att arbetet som den applicerade kraften uträttade när fjäderänden förflyttades från 0 till x_{max} var

$$W_{app} = + \tfrac{1}{2} k x_{max}^2$$

Om vi jämför arbetet som denna applicerade kraft uträttar kommer vi alltid att finna att det är lika stor fast med omvänt tecken som det arbete som fjäderkraften uträttar.

Rörelseenergi och dess samband med arbete.

I vårt exempel med fjädersvängningen påverkades blocket bara av en enda horisontell kraft, fjäderkraften, när den applicerade kraften avlägsnats. I det allmänna fallet kan man tänka sig många krafter som verkar på en kropp. Det finns dock alltid en resulterande kraft som alltså är en nettokraft. Det arbete som denna nettokraft uträttar ges av

$$W_{net} = \int_i^f \Sigma \, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

För endimensionell rörelse kan detta skrivas:

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_f} \Sigma \, F \cdot dx$$

För att kunna beräkna denna integral måste vi känna den resulterande kraften. Nu koncentrerar vi oss på vad denna nettokraft har för verkan på kroppen, vars massa är m. Nettokraften leder till att kroppen får en acceleration a och vi kan utveckla detta enligt:

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_f} \Sigma \, F \cdot dx = \int_{x_i}^{x_f} ma \, dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx = \int_{v_i}^{v_f} mv \, dv$$

Vi får alltså

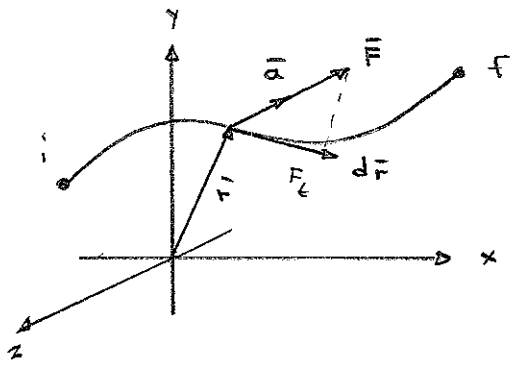
$$W_{net} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2$$

Storheten $\frac{1}{2} m v^2$ kallas rörelseenergi eller kinetisk energi och betecknas i läroboken med K. En annan vanlig beteckning är E_{kin}. Utan kännedom om nettokraften kan vi naturligtvis inte räkna ut hur stor ändring av den kinetiska energin ΔK som den åstadkommer. Vi ska snart introducera begreppet potentiell energi eller lägesenergi som ett kompletterande verktyg.

I tre dimensioner ser härledningen ut enligt följande:

$$W = \int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_i^f F_t \, ds =$$

$$W = \int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_i^f m\bar{a} \cdot d\bar{r}$$



$$\bar{a} \cdot d\bar{r} = a_t \, ds = \frac{dv}{dt} \cdot ds =$$

$$= \frac{ds}{dt} \cdot dv$$

$$\Rightarrow W = \int_i^f m \frac{ds}{dt} \cdot dv = m \int_{v_i}^{v_f} v \cdot dv = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Problem som innehåller friktion:

När vi har räknat ut arbete har vi utgått ifrån att nettokraften består av en viss typ av krafter som kallas konservativa. Tyngdkraft, normalkraft, spännkraft är exempel på sådana krafter. Om de enda krafterna som är närvarande är konservativa kan vi beräkna nettokraften och använda den för att räkna ut hur mycket farten ändras, vilket innebär att den kinetiska energin ändras.

När det finns icke konservativa krafter i problemet måste vi passa oss. Ett exempel på en icke-konservativa kraft är friktionskraften.
När en kropp glider på ett bord och det finns friktion mellan kroppen och bordet ökar såväl kroppens som bordets temperatur. Detta innebär att den så kallade inre energin E_{int} hos kropp + bord ökar med ΔE_{int}.
Sammanfattningsvis slutar detta med följande samband:

$$\Sigma W_{\text{other forces}} - f_k\, dr = \Delta K$$

"other forces" står för alla konservativa krafter som verkar på kroppen.
Läs mer i boken på sidorna 173-177.

Effekt:

Den energi som överförs till ett system per tidsenhet kallas effekt och brukar betecknas P (i boken använder man beteckningen P). Enhet är J/s eller Watt (W). Som kuriosa kan nämnas att en hästkraft är 746 W.

Man kan tala om

medeleffekt = $W/\Delta t$

eller

momentaneffekt = dW/dt

Potentiell energi.

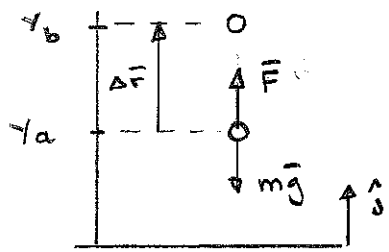
När vi definierade begreppet kinetisk energi använde vi oss av sambandet

$$W_{net} = \int \Sigma F \; dx = ma \, dx = \Delta K$$

Nu ska vi beräkna $\int \Sigma F \; dx$ för några olika typer av krafter. Vi börjar med tyngdkraften.

Potentiell energi i gravitationsfältet:

Låt oss flytta en kropp med massan m från utgångsläget y_a till slutläget y_b. Detta sker med en yttre kraft **F** som är obetydligt större till sitt belopp än tyngkraften m **g**. I figuren befinner sig slutläget längre ifrån nollnivån (som kan vara marken) än begynnelsenivån. Notera dock att inget i våra räkningar utnyttjar att så är fallet.



Det arbete W som den yttre kraften (som är riktad uppåt) $\mathbf{F} = -m\,\mathbf{g} = mg\hat{\mathbf{j}}$ uträttar vid förflyttningen ges av uttrycket

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dy} = \int (-m\mathbf{g}) \; \mathbf{dy} = \int -mg(-\hat{\mathbf{j}}) \; dy \, (\hat{\mathbf{j}}) = \int mg \, dy = mg\, y_b - mg\, y_a$$

Vi definierar nu den potentiella energin U_g i gravitationsfältet enligt

$$U_g = mgy$$

I enlighet med detta finner vi att arbetet W som den yttre kraften uträttar vid förflyttningen kan skrivas

$$W = \Delta U_g$$

I det fall då förflyttningen mellan två punkter $\Delta \mathbf{r} = (x_b - x_a)\hat{\mathbf{i}} - (y_b - y_a)\hat{\mathbf{j}}$ får vi:

$$W = \int (-m\mathbf{g}) \; \Delta \mathbf{r} = \int (-m(-g\hat{\mathbf{j}})) \; ((x_b - x_a)\hat{\mathbf{i}} - (y_b - y_a)\hat{\mathbf{j}}) = mg\, y_b - mg\, y_a$$

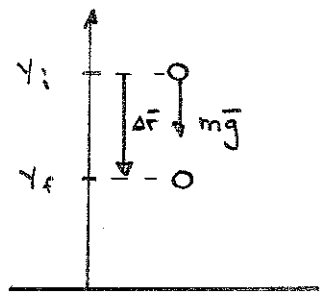
Vi ser att endast förflyttningens komponent i vertikal led påverkar arbetet.

Vi har tidigare räknat ut att det arbete som fjäderkraften uträttar när änden på fjädern flyttas från läget x_i till x_f är $\frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$. Det innebär att det är lämpligt att definiera den potentiella energin för fjäderkraften som

$$U_s = \frac{1}{2} k x^2$$

Nu ska vi knyta ihop det som vi kom fram till när vi introducerade begreppet kinetisk energi med begreppet potentiell energi.

Lägg märke till att vi nu studerar det fall när objektet endast utsätts för gravitationskraften $m\,\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{j}}$. Den yttre kraften är avlägsnad och vi bortser från friktion och luftmotstånd.



I figuren har vi ritat fallet när objektet faller mot marken, men diskussionen håller även för det fall när det avlägsnar sig från marknivån. Det senare kan åstadkommas genom att någon kastar föremålet rakt uppåt och att det därefter endast påverkas av gravitationskraften. Under en fas av rörelsen avlägsnar sig kroppen från markytan trots att den endast påverkas av den nedåtriktade tyngdkraften.

Vi beräknar det arbete som <u>gravitationskraften</u> uträttar under förflyttningen från y_i till y_f.

$$W_g = (m\,\mathbf{g})\ \Delta\mathbf{r} = (-mg\hat{\mathbf{j}})\ (y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}} = mg\,y_i - mg\,y_f = U_i - U_f$$

Tidigare har vi sett att arbete innebär att kinetiska energin ändras enligt:

$$W = K_f - K_i$$

Arbetet i det här fallet är W_g och vi får då:

$$U_i - U_f = K_f - K_i \quad \text{d v s} \quad -\Delta U = \Delta K$$

eller

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

Vi kan genomföra dessa beräkningar för olika typer av krafter, men så länge som de krafter som verkar är konservativa gäller att summan av potentiell och kinetisk energi är konstant.

Summan av potentiell och kinetisk energi kallas <u>mekanisk energi</u>. Om ett system endast påverkas av konservativa krafter bevaras dess mekaniska energi.

Vi problemlösning finns det en risk för att man "instinktivt" utgår ifrån att den mekaniska energin bevaras. Var försiktig med detta!

I de fall då ett system utsätts för såväl konservativa som icke konservativa krafter gäller:

$$K + U + \Delta E_{int} = \text{konstant}$$

<u>Samband mellan konservativa krafter och potentiell energi.</u>

Vi har sett att sambandet mellan det arbete som gravitationskraften uträttar och förändringen av den potentiella energin ges av

$$W_g = - \Delta U$$

Vi skulle kunna skkriva detta som

$$dW = - \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

I ett dimensionellt problem ger detta

$$dW = - dU = F\,dx \quad \text{vilket innebär} \quad F = - dU/dx$$

Insättning av den potentionella energin i gravitationsfältet och för en fjäder ger

$$F_g = - d/dy\,(mgy) = -mg \;, \quad \mathbf{F}_g = F_g \hat{\mathbf{j}} = -mg\,\hat{\mathbf{j}}$$

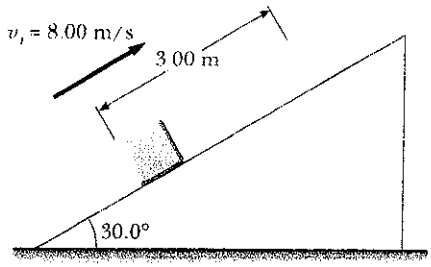
$$F_s = - d/dx\,(1/2\,k\,x^2) = - kx \;, \quad \mathbf{F}_s = F_s \hat{\mathbf{i}} = -kx\,\hat{\mathbf{i}}$$

I tre dimensioner får vi

$$\bar{F} = - \hat{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

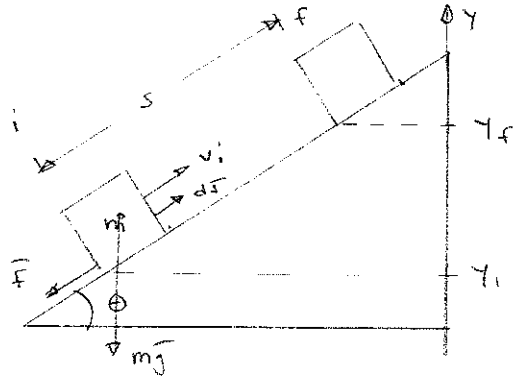
7.25

25. A 5.00-kg block is set into motion up an inclined plane with an initial speed of 8.00 m/s (Fig. P7.25). The block comes to rest after traveling 3.00 m along the plane, which is inclined at an angle of 30.0° to the horizontal. For this motion determine (a) the change in the block's kinetic energy, (b) the change in the potential energy of the block–Earth system and (c) the friction force exerted on the block (assumed to be constant). (d) What is the coefficient of kinetic friction?



9

Lösning:



given: $v_i = 8{,}00$ m/s $v_f = 0$
$\theta = 30°$ $m = 5{,}00$ kg
$s = 3{,}00$ m

a) ΔK:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\frac{1}{2} 5{,}0 (8{,}00)^2 =$$
$$= \underline{\underline{-160 \text{ J}}}$$

b) ΔU (i gravfältet)

$$\Delta U = mg\Delta y = mg(y_f - y_i) = mg\, s \cdot \sin\theta =$$
$$= 5{,}00 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}00 \cdot \sin 30° = \underline{\underline{73{,}5 \text{ J}}}$$

c) friktionskraften $|\bar{f}|$: $\bar{F} = \bar{f} + m\bar{g}$

$$\int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

$$\int_i^f (\bar{f} + m\bar{g}) \cdot d\bar{s} = \int_i^f \bar{f} \cdot d\bar{s} + \int_i^f m\bar{g} \cdot d\bar{s} = -fs + (-\Delta U)$$

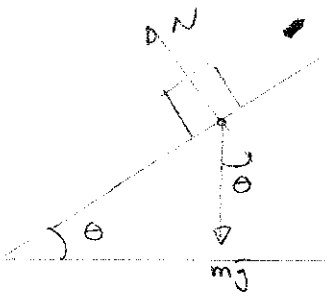
$$\Rightarrow -fs - \Delta U = \Delta K \quad \Rightarrow f = -\frac{\Delta K + \Delta U}{s} = -\frac{(-160) + 73{,}5}{3{,}00} =$$
$$= \underline{\underline{28{,}8 \text{ N}}}$$

d) μ_k:

$$\left.\begin{aligned} f &= \mu_k \cdot N \\ N &= mg\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \mu_k mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{f}{mg\cos\theta} = \underline{\underline{0{,}678}}$$



Obs!

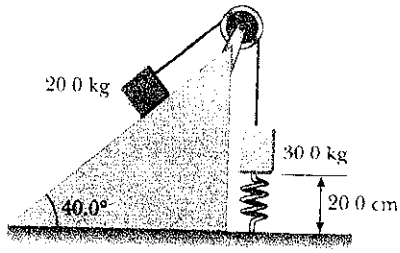
$$\int_i^f \bar{F}\, d\bar{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

Om endast konservativa krafter verkar: $\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$

$$\text{"} \int_i^f \bar{F}_c \cdot d\bar{s} = -\Delta U$$

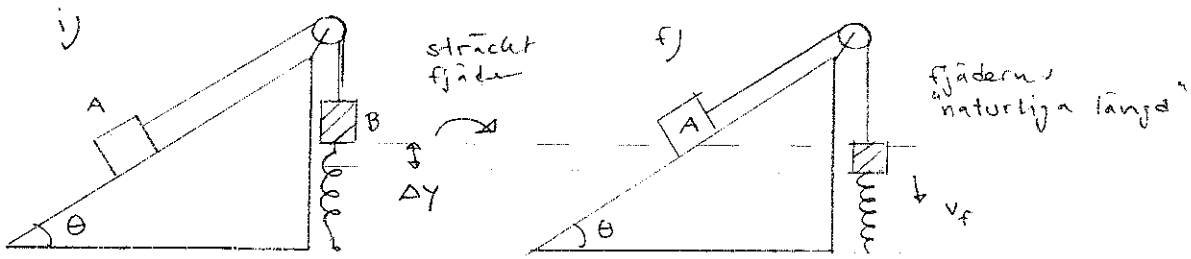
7 53

53. A 20.0-kg block is connected to a 30.0-kg block by a string that passes over a light frictionless pulley. The 30.0-kg block is connected to a spring that has negligible mass and a force constant of 250 N/m as shown in Figure P7.53. The spring is unstretched when the system is as shown in the figure, and the incline is frictionless. The 20.0-kg block is pulled 20.0 cm down the incline (so that the 30.0-kg block is 40.0 cm above the floor) and released from rest. Find the speed of each block when the 30.0-kg block is 20.0 cm above the floor (that is, when the spring is unstretched).



Lösning:

friktionsfritt



Givet $\theta = 40°$ $m_A = 20{,}0$ kg $m_B = 30{,}0$ kg $k = 250$ N/m

$\Delta y = 0{,}20$ m $v_i = 0$ f: fjädern relaxerad.

Sökt v_f

Den mekaniska energin bevaras eftersom de krafter som är relevanta är konservativa.

$\Rightarrow \Delta E_{mek} = E_{mek,f} - E_{mek,i}$ dvs (efter) − (före) $= 0$

$\Delta E_{mek} = \Delta E_{mek,A} + \Delta E_{mek,B} + \Delta E_{mek,fjäder} = 0$

$\Delta E_{mek,A} = \frac{1}{2} m_A v_f^2 + m_A g \Delta y \cdot \sin\theta$

$\Delta E_{mek,B} = \frac{1}{2} m_B v_f^2 - m_B g \Delta y - 0$

$\Delta E_{mek,fj} = 0 - \frac{1}{2} k (\Delta y^2)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_f^2 + m_A g \Delta y \sin\theta + \frac{1}{2} m_B v_f^2 - m_B g \Delta y - \frac{1}{2} k (\Delta y)^2$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 g \Delta y \left(\frac{m_B}{m_A} - \sin\theta\right) + \frac{k}{m_A}(\Delta y)^2}{1 + \frac{m_B}{m_A}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}20 \left(\frac{30}{20} - \sin 40\right) + \frac{250}{20}(0{,}20)^2}{1 + \frac{30}{20}}} = \underline{1{,}24 \text{ m/s}}$$

7.61

61 A pendulum, comprising a light string of length L and a small sphere swings in a vertical plane The string hits a peg located a distance d below the point of suspension (Fig P7 61). (a) Show that if the sphere is released from a height below that of the peg, it will return to this height after the string strikes the peg (b) Show that if the pendulum is released from the horizontal position ($\theta = 90°$) and is to swing in a complete circle centered on the peg, the minimum value of d must be $3L/5$

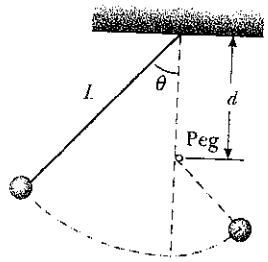
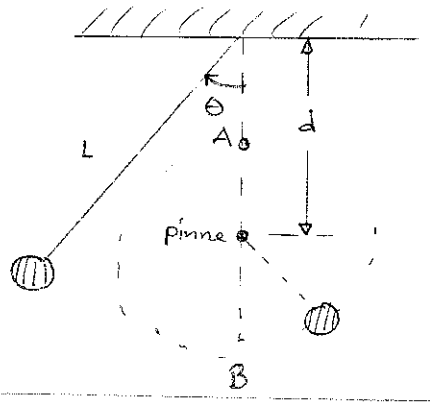
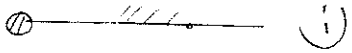


FIGURE P7.61

Lösning:



Pendeln släpps från $\theta = 90°$
dvs

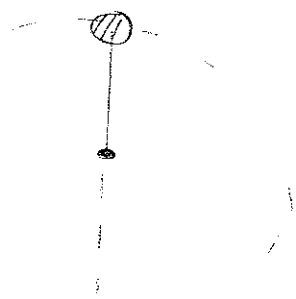


Visa att $d_{min} = \frac{3}{5}L$ om pendeln ska kunna gå i en cirkulär bana runt pinnen.

Det kritiska läget är A:

radien i den cirkulära banan runt pinnen:

$$r = (L - d)$$



spänningskraften T i snöret är i A av

$$m\frac{v_A^2}{r} = mg + T$$

där $T \geq 0$

$$\Rightarrow m\frac{v_A^2}{r} > mg \Rightarrow \frac{v_A^2}{(L-d)} > g$$

sätt den potentiella energin $= 0$ i läge B

i): $U_i = mgL \quad K_i = 0$

A): $U_A = mg2r = mg2(L-d)$, $K_A = \frac{1}{2}mv_A^2$

mek. energin bevarad: $mgL = mg2(L-d) + \frac{1}{2}mv_A^2$

$\Rightarrow 2gL = 4gL - 4gd + v_A^2 \quad \Rightarrow v_A^2 = 4gd - 2gL$

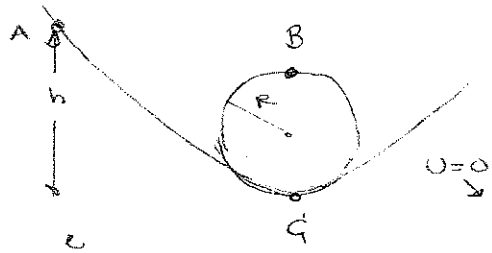
$$\Rightarrow \frac{v_A^2}{L-d} > g \Rightarrow \frac{4gd - 2gL}{L-d} > g \Rightarrow 4d - 2L > L - d \Rightarrow 5d > 3L$$

$$\Rightarrow d > \frac{3}{5}L \quad \text{V.S.V.}$$

7.62

Løsning:

a)



B: $m\frac{v_B^2}{R} = mg + N$

$N_{min} = 0$

$\Rightarrow m\frac{v_B^2}{R} > mg$

$\Rightarrow v_B^2 > gR$

A: mgh

B: $\frac{1}{2}mv_B^2 + 2Rgm$

$\therefore mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2Rgm$

$\Rightarrow mgh > \frac{1}{2}mgR + 2Rgm$

$\Rightarrow \boxed{h_{min} = 2\frac{1}{2}R}$

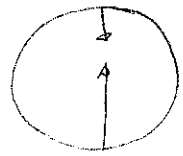
Skillnad i normalkraft $N_C - N_B$:

b) $h > 2\frac{1}{2}R$:

$$\left.\begin{aligned} B:&\quad m\frac{v_B^2}{R} = mg + N_B \\ C:&\quad m\frac{v_C^2}{R} = N_C - mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow N_C - N_B = 2mg + \frac{m}{R}(v_C^2 - v_B^2)$$

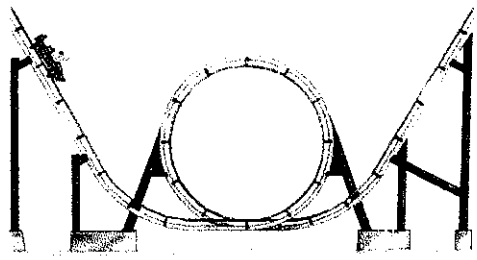
energiprincipen: $\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2Rmg$

$\Rightarrow v_C^2 - v_B^2 = 4Rg$



$\Rightarrow N_C - N_B = 2mg + \frac{m}{R}\cdot 4Rg = \underline{6mg}$

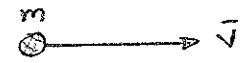
first rise and then moves freely with negligible friction. The roller coaster shown in Figure P7.62 has a circular loop of radius R in a vertical plane. (a) First suppose the car barely makes it around the loop; at the top of the loop the riders are upside down and feel weightless. Find the required height of the release point above the bottom of the loop in terms of R. (b) Now assume that the release point is at or above the minimum required height. Show that the normal force on the car at the bottom of the loop exceeds the normal force at the top of the loop by six times the weight of the car. The normal force on each rider follows the same rule. Such a large normal force is dangerous and very uncomfortable for the riders. Roller coasters are therefore not built with circular loops in vertical planes. Figure P5.24 and the photograph on page 134 show two actual designs.



12

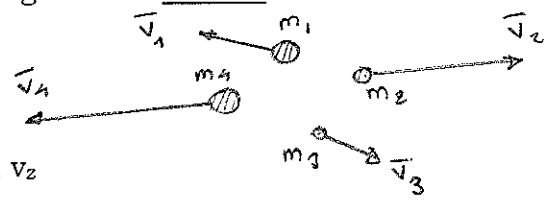
Rörelsemängd:

När vi studerade begreppet mekanisk energi fann vi att det var en storhet som alltid bevarades för ett system om de krafter verkar på det är konservativa. Nu kommer vi till en annan storhet som har den mycket användbara egenskapen att den är konstant för ett system om vissa, inte alltför ovanliga, villkor är uppfyllda; rörelsemängden.
Du har säkert hört talas om begreppet rörelsemängd och vet att det definieras som produkten av massa och hastighet. Kanske har du undrat över vad rörelsemängd "egentligen är för något". Ett av skälen till att vi pratar om storheten rörelsemängd är att den har så trevliga egenskaper. En sådan är att den är konstant i tiden för ett isolerat system, d v s ett system som inte påverkas av några yttre krafter. Eftersom rörelsemängden är en vektorstorhet så är det inte nog med det. Om ett system av partiklar påverkas av krafter i x- och y-led men inte av några krafter i z-led, så är z-komponenten av rörelsemängden konstant. x- och y-komponenterna av rörelsemängden ändras dock.



Beteckningar: **p** = rörelsemängden för en enda partikel.

P = den sammanlagda rörelsemängden hos ett helt system av partiklar.



Definition: $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$

$p_x = m\,v_x \qquad p_y = m\,v_y \qquad p_z = m\,v_z$

$$\mathbf{P} = \Sigma\,\mathbf{p}_i = \Sigma\,m_i\,\mathbf{p}_i$$

Newtons andra lag kan skrivas

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

vilket ger

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt$$

eller

$$\Delta\mathbf{p} = \int d\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt = \text{impulsen}$$

Impuls är alltså ändring av rörelsemängd.

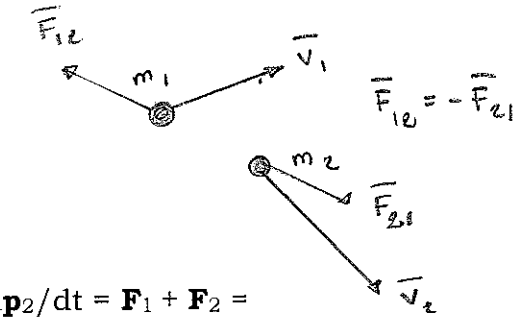
En partikel som inte påverkas av några yttre krafter brukar betecknas som en fri partikel. Från det ovanstående ser vi att en partikels rörelsemängd inte kan ändras om den inte utsätt för några yttre krafter.

Tröghetslagen: en fri partikel rör sig med konstant rörelsemängd.

Flera partiklar:

När vi har att göra med flera partiklar så kan de krafter som är inblandade delas upp i två kategorier; interna och externa krafter. Eftersom det praktiskt taget alltid finns interna krafter i ett system av partiklar (exempelvis elektriska krafter eller gravitationskrafter mellan partiklarna) så är ju inte varje individuell partikel fri även om det inte finns några externa krafter som verkar på någon av dem. I någon mening kan man dock säga att hela systemet är fritt om det inte utsätts för några externa krafter.

För att komma vidare till stora system av partiklar studerar vi nu först två partiklar som är isolerade från omvärlden. Alltså inga externa krafter. Bara interna.



Hela systemets rörelsemängd:

$$\mathbf{P} = \Sigma\, \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

Detta innebär att:

$$d\mathbf{P}/dt = d\mathbf{p}_1/dt + d\mathbf{p}_2/dt = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 =$$

$$= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} + (-\mathbf{F}_{12}) = 0$$

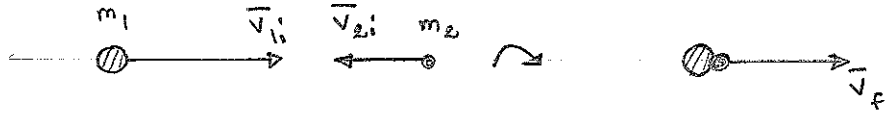
De inre krafterna påverkar alltså inte systemets totala rörelsemängd. Om två lerklumpar krockar ute i världsrymden (långt ifrån några andra kroppar) så kommer en förändring av den enes rörelsemängd att leda till att den andre ändras lika mycket fast åt motsatt håll. Kom ihåg att rörelsemängden är en vektorstorhet!

Med externa krafter närvarande så ges ändringen av de två partiklarnas sammanlagda rörelsemängd av summan av de krafter som verkar på var och en av partiklarna. Mer om detta när vi kommer till det generella fallet.

Kollisioner.

Vi ska nu studera några enkla kollisionsproblem där två kroppar stöter emot varandra; två endimensionella och ett tvådimensionellt. Vi antar att vi kan försumma inverkan från externa krafter.

a. Helt oelastisk kollision: kropparna fastnar i varandra och får en gemensam sluthastighet $\mathbf{v}_f$. Rörelsemängden bevaras men inte den mekaniska energin!

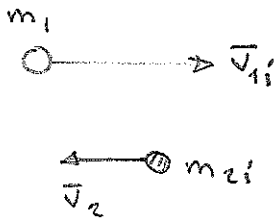


$$m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_f$$

Vilket ger

$$\mathbf{v}_f = (m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i})/(m_1 + m_2)$$

Exempel: $m_1 = 2{,}0$ kg $\quad \bar{v}_{1i} = +5$ m/s



$m_2 = 1{,}0$ kg $\quad \bar{v}_{2i} = -3$ m/s

$$\bar{v}_f = \frac{m_1\bar{v}_{1i} + m_2\bar{v}_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{2{,}0 \cdot 5 + 1{,}0(-3)}{2{,}0 + 1{,}0} \text{ m/s} =$$

$$= \frac{7}{3} \text{ m/s} = 4{,}33 \text{ m/s} = \underline{\underline{4 \text{ m/s}}}$$

b. Helt elastisk kollision: såväl rörelsemängd som mekanisk energi bevaras.

$$\begin{cases} m_1\bar{v}_{1i} + m_2\bar{v}_{2i} = m_1\bar{v}_{1f} + m_2\bar{v}_{2f} & (1) \\ \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{2i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 & (2) \end{cases}$$

2 ger $m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$

$\Rightarrow m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$ (2')

(1) ger (i en dimension): $m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$ (1')

Dividera (2') med (1') $\Rightarrow v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} \Rightarrow \boxed{(v_{1i} - v_{2i}) = -(v_{1f} - v_{2f})}$ (3)

<u>Detta innebär att den relativa hastigheten efter kollisionen är lika stor som före kollisionen, men den är riktad åt rakt motsatt håll.</u>

Om vi nu kombinerar ekvationerna 1 och 3 får vi:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

och

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Tänk på att tecknen måste inkluderas v > 0 innebär exempelvis att partikeln färdas i positiv x-led och med samma teckenkonvention så innebär v < 0 en rörelse i negativ x-led.

Om den ena partikeln befinner sig i vila före kollisionen får vi: $(v_{2i} = 0)$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

och

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

c. Tvådimensionell elastisk kollision:

Antag att vi har två puckar som ligger på ett helt glatt underlag och att den enda rörelseenergiform som förekommer är translationsenergi. För att åstadkomma detta så skulle puckarna egentligen ha behövs vara matematiska punkter utan utsträckning. Vi vill alltså studera problemet utan att ta hänsyn till att puckarna snurrar runt sin egen symmetriaxel.

Vi placerar ett koordinatsystem enligt figuren. z-axeln pekar rakt upp från den glatta ytan.

Den ena pucken ligger helt stilla och träffas av den andra.

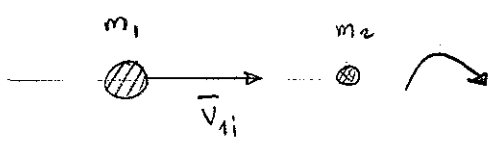
Rörelsemängden bevaras i såväl x- som y-led (självklart även z-led). Detta innebär:

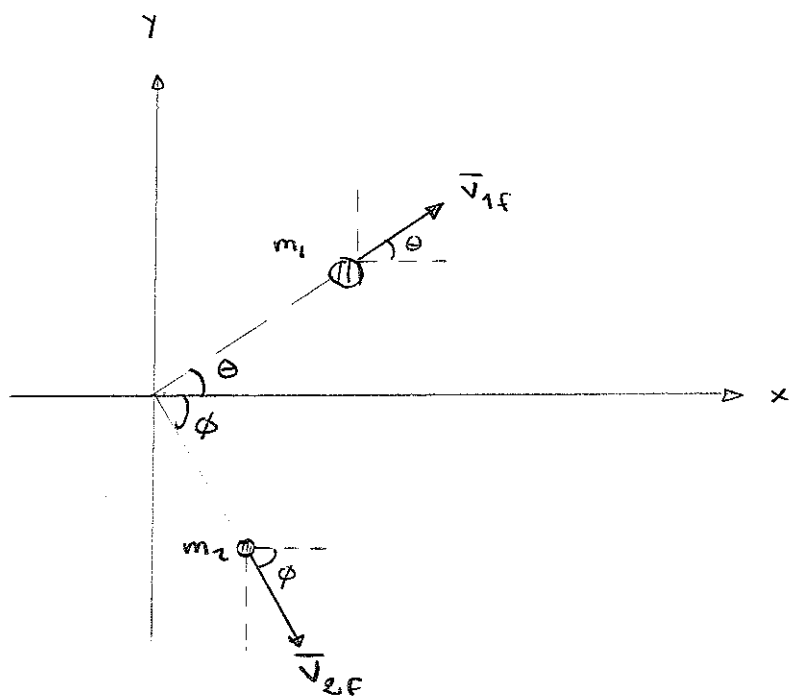
$$\left.\begin{aligned} &x\text{-led}: \quad m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cdot \cos\theta + m_2 v_{2f} \cdot \cos\phi \\ &y\text{-led}: \quad 0 = m_1 v_{1f} \cdot \sin\theta - m_2 v_{2f} \cdot \sin\phi \end{aligned}\right\}$$

Om kollisionen dessutom är elastisk har vi:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Om vi känner $\mathbf{v}_{1i}$ samt massorna m_1 och m_2 så har vi fyra obekanta (v_{1f} och v_{2f} samt vinklarna θ och ϕ) men bara tre ekvationer. För att lösa ekvationssystemet måste vi känna en av de obekanta. Vanligen är detta θ eller ϕ).

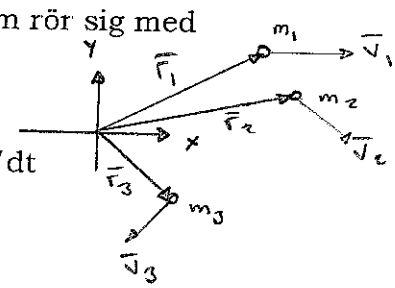




Begreppet TYNGDPUNKT.

Vi ska nu definiera begreppet tyngdpunkt. För högsymmetriska kroppar (såsom klot kuber och liknade) är tyngdpunktens läge en trivialitet att bestämma. Men i allmänhet är det inte lika enkelt.

Antag att vi har en svärm av partiklar med olika massor som rör sig med olika hastigheter.
Deras sammanlagda rörelsemängd ges av:



$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = d(\sum_i m_i \mathbf{r}_i)/dt$$

Vi definierar nu tyngdpunktens läge **R** enligt:

$$M \equiv \sum_i m_i \qquad \mathbf{R} = (\sum_i m_i \mathbf{r}_i)/M$$

Nu kan vi skriva

$$\mathbf{P} = d(M\,\underline{\mathbf{R}})/dt$$

Systemets totala rörelsemängd är lika med dess totala massa multiplicerad med tyngdpunktens hastighet.
Med detta i bakfickan kan vi nu räkna ut tyngdpunktens acceleration.
Detta fås genom att vi deriverar detta uttryck.

$$d\mathbf{P}/dt = d^2(M\,\underline{\mathbf{R}})/dt^2$$

Det som ger tidsderivatan av den totala rörelsemängden är summan av alla krafter som verkar på systemet. Systemets totala rörelsemängd är lika med dess totala massa multiplicerad med tyngdpunktens hastighet. Gå tillbaka till avsnittet där vi behandlade två partiklar och generalisera detta till många partiklar och närvaro av externa krafter.

$$d\mathbf{P}/dt = \sum_i (d\mathbf{p}_i/dt) = \Sigma\, \mathbf{F}_i$$

men

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_i \mathbf{F}_i^{int} = \Sigma\, \mathbf{F}_i^{ext} + 0$$

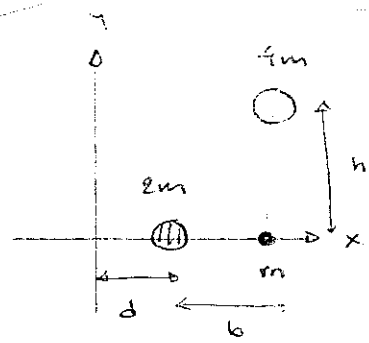
Vi har ju sett att summan av alla interna krafter är lika med noll.

Nu har vi alltså:

$$d^2(M\,\underline{\mathbf{R}})/dt^2 = d\mathbf{P}/dt = \Sigma\, \mathbf{F}_i^{ext}$$

Tyngdpunktens acceleration ges av summan av alla externa krafter som verkar på systemet. Detta har vi ju använt många gånger förr, när vi t ex har låtsats som om hela tyngdkraften som verkar på en kropp angriper i tyngdpunkten. Den totala tyngdkraften är ju egentligen summan av tyngdkraften på samtliga atomer som kroppen består av. Interna krafter (de som håller ihop kroppen) har vi aldrig blandat in i våra räkningar och nu har vi rett ut varför det är OK att göra på det viset.

ex 1 3 partiklar



$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{2md + m(d+b) + 4m(d+b)}{7m} = d + \frac{5}{7} b$$

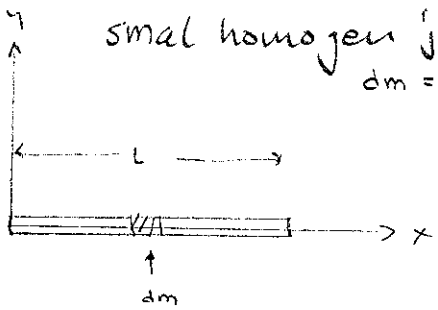
$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{0 + 0 + 4mh}{7} = \frac{4}{7} h$$

$$\Rightarrow \bar{r}_c = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} = \left(d + \frac{5}{7} b\right)\hat{i} + \frac{4}{7}\hat{j}$$

---

ex 2 smal homogen jämntjocka

$dm = \lambda \, dx$



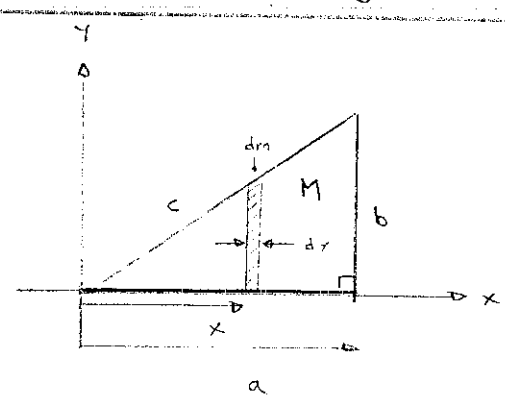
$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \text{massa / längdenhet}$$

$$x_c = \frac{1}{M} \int_0^L x \, dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda \, dx = \frac{\lambda}{M} \frac{L^2}{2}$$

men $\lambda = \frac{M}{L}$ $\Rightarrow$ $x_c = \frac{L}{2}$

---

ex 3 Triangel



$$dm = \frac{\text{Tot. massa}}{\text{Tot. area}} y \, dx$$

$$\Rightarrow dm = \frac{M}{\frac{1}{2} ab} y \, dx = \frac{2M}{ab} y \, dx$$

$$y = \frac{b}{a} x$$

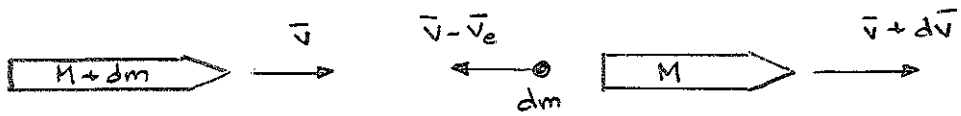
$$\Rightarrow x_c = \frac{1}{M} \int_0^a x \, dm = \frac{2}{ab} \int_0^a xy \, dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3} a$$

p.s.

$$y_c = \frac{1}{M} \int_0^b y \, dm = \frac{1}{3} b$$ (öva på detta själv!)

Raketekvationen.

Lagen om bevarande av rörelsemängden för ett isolerat system kan bland annat användas för att beräkna hastigheten för en raket som befinner sig ute i världsrymden.
Hastigheten förändras genom att bränsleelement slungas ut från raketen.



Vi antar att raketmotorn emitterar bränsleelement med massan dm och att dessa slungas ut med hastigheten $\mathbf{v_e}$ relativt raketen. Om raketen vid ett visst ögonblick har massan M + dm och hastigheten **v** innan ett visst bränsleelement slungas ut samt massan M och hastigheten **v** + **dv** efteråt kan vi ställa upp ekvationen för rörelsemängd före och efter utslungningen:

$$(M + dm)\, v = M(v + dv) + dm(v - v_e)$$

Detta ger

$$M\, dv = dm\, v_e$$

men dm är lika med minskningen av raketens massa d v s dm = -dM och vi får då

$$M\, dv = -dM\, v_e$$

Om raketen har en viss urspungshastigheten v_i när den har massan M_i kan vi nu räkna har stor dess hastighet v_f är när den har massan M_f:

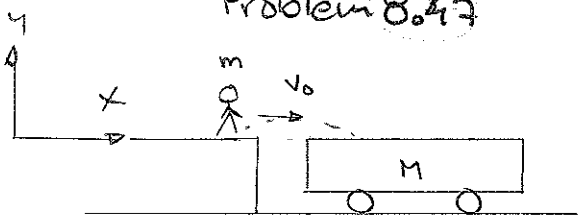
$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \quad \Rightarrow \quad v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

Lägg märke till att sambandet inte är linjärt. Det beror på att det sista bränsleelementet som slungas ut åstadkommer en större fartökning än alla de tidigare masselementen eftersom raketen då har minst massa.

Vi kan också räkna ut raketens acceleration om vi vet hur snabbt dess massa förändras, d v s hur mycket bränsle som slungas ut per sekund.

$$Ma = M\frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

Problem 8.47



Lösning:

$m = 60{,}0$ kg $\quad M = 120{,}0$ kg

$v_0 = 4{,}00$ m $\quad \mu_k = 0{,}400$

a) Slutfarten för (m+M) relativt marken.

inga externa krafter i x-led
$\Rightarrow P_x$ konstant

$$m\bar{v}_0 + 0 = (m+M)\,\bar{v}_f$$

$$\Rightarrow \bar{v}_f = \frac{m}{m+M}\,\bar{v}_0 = \frac{60}{60+120}\,4{,}00\hat{x} =$$

$$= 1{,}33\hat{x}\ \text{m/s}$$

b) friktionskraft på m under glidningsfasen:

$$\Sigma \bar{F}_y = 0 \qquad N = mg \qquad f = \mu_k N = \mu_k mg = 0{,}400 \cdot 60 \cdot 9{,}81 = \underline{\underline{235\ N}}$$

$$\bar{f} = 235(-\hat{x})\ N$$

c) Under hur lång tid glider m?

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F} = \bar{f} \Rightarrow d\bar{p} = \bar{F}\,dt \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta\bar{p} = \bar{F}\,\Delta t \\ \Delta\bar{p} = m\bar{v}_f - m\bar{v}_i \\ \bar{v}_f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\bar{v}_f - \bar{v}_i) = \bar{f}\,\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{m(\bar{v}_f - \bar{v}_i)}{\bar{F}} = \frac{60{,}0(1{,}33 - 4{,}00)\hat{x}}{-235\hat{x}} = \underline{\underline{0{,}68\ s}}$$

alt. retardation $a = -\frac{f}{m}$ $\qquad a\,\Delta t = v_f - v_i \Rightarrow \Delta t = \frac{4{,}00 - 1{,}33}{\frac{235}{60}} = 0{,}68$ s

d) Δp_m & Δp_M:

$$\Delta\bar{p}_m = m\bar{v}_f - m\bar{v}_i = 60(1{,}33 - 4{,}00)\hat{x} =$$

$$= -160\ \text{kgm/s}\ \hat{x}$$

$$\Delta\bar{p}_M = M\bar{v}_f - 0 = 120 \cdot 1{,}33\,\hat{x}\ \text{kgm/s} = +160\hat{x}\ \text{kgm/s}$$

e) Δx under glidningen. $\qquad v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot a\,\Delta x$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{-2\,\frac{f}{m}} = \frac{1{,}33^2 - 4{,}00^2}{-2\,\frac{235}{60}} = \underline{\underline{1{,}81\ m}}$$

f) Förflyttning av vagnen under glidningsfasen $\Delta x'$

På vagnen verkar $-\bar{f}$ dvs en accelererande kraft. $235\hat{x}$ N

$$\bar{a}_M = \frac{-\bar{f}}{M} = \frac{235}{120}\hat{x}$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2\, a_M \cdot \Delta x' \Rightarrow \Delta x' = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2 a_M} = \frac{1{,}33^2 - 0^2}{2\,\frac{235}{120}}\ \text{m} = \underline{\underline{0{,}45\ \text{m}}}$$

---

g) ΔK_m:

$$\Delta K_m = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2}\, 60 \cdot 1{,}33^2 - \frac{1}{2}\, 60 \cdot 4{,}00^2 =$$

$$= \underline{\underline{-426{,}7\ \text{J}}}$$

---

h) ΔK_M:

$$\Delta K_M = \frac{1}{2} M v_f^2 - 0 = \frac{1}{2}\, 120 \cdot 1{,}33^2\ \text{J} = \underline{\underline{106{,}7\ \text{J}}}$$

---

i) Skillnaden mellan ΔK_M och ΔK_m: $= 320$ J

Friktionsarbete under m:s glidning.

$\Delta x_i = 1{,}81$ m glidning relativt marken

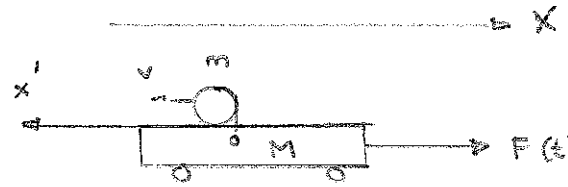
$\Delta x' = 0{,}45$ m vagnens rörelse rel. marken under glidningsfasen.

Δs = m:s glidsträcka på vagnen $= \Delta x - \Delta x'$

$$W_f = f \cdot \Delta s = 235\,(1{,}81 - 0{,}45) \approx \underline{\underline{320\ \text{J}}}.\quad \text{ok!}$$

Ur Gran & Jansson

En rotationssymmetrisk kropp med massan 120 kg vilar på en stillastående vagn vars massa är 150 kg. Kroppens tyngdpunkt befinner sig på avståndet 4,0 m från vagnens bakkant. Plötsligt (vid tiden t = 0) börjar en framåtverkande kraft F(t) = c t verka på vagnen (c är en konstant med värdet 800 N/s). Vagnen, som kan rulla utan friktion, börjar röra sig framåt, medan kroppen rullar bakåt på vagnens flak. Efter 2,5 s når den vagnens bakkant. Hur långt har då vagnen rört sig?



Lösning:

På hela ekipaget (vagn + rulle) verkar en enda kraft, F(t), i x-led eftersom vi får bortse från friktion.

Ekipagets rörelsemängd ändras enligt nedanstående om F(t) får verka under t sekunder

$$\Delta P = M \cdot \Delta v_v + m\,\Delta v_r = \int_0^t F(t)\cdot dt \qquad F = \frac{dP}{dt}$$

v_v och v_r är hast. rel. marken!

Eftersom allt ligger stilla vid t=0 kan vi skriva

$$M v_v + m v_r = \int_0^t F(t)\cdot dt$$

Vi känner till hur lång tid det tar för rullen att ta sig fram 4,0 m på flaket så vi har information om rullens rörelse relativt flaket. Vi kallar den hastigheten $u = \frac{dx'}{dt}$

om vi då har att $v_v = \frac{dX}{dt}$ så kan vi skriva $v_r = v_v - u$

$$\Rightarrow \int_0^t F(t)\,dt = M v_v + m(v_v - u) = M\frac{dX}{dt} + m\frac{dX}{dt} - m\frac{dx'}{dt} =$$

$$= (M+m)\frac{dX}{dt} - m\frac{dx'}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ct^2 = (M+m)\frac{dX}{dt} - m\frac{dx'}{dt}$$

Vi vet hur långt rullen färdats under tiden t_0 (= 2,5 s) dvs vi känner $\int_0^{t_0} dx' = l$ och vi söker $\int_0^{t_0} dX = L$

$$\Rightarrow \int_0^{t_0} \frac{1}{2}ct^2\cdot dt = (M+m)\int_0^{t_0} dX - m\int_0^{t_0} dx'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}ct_0^3 = (M+m)L - ml \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\frac{1}{6}ct_0^3 + ml}{M+m} = \frac{\frac{1}{6}\,800\cdot 2{,}5^3 + 120\cdot 4{,}0}{150+120}$$

[Dim. kontr. $ct^3 = \frac{kgm}{s^2}\frac{1}{s}\cdot s^3 = kgm$]

$$= \underline{\underline{6{,}03\ m}}$$