Februari 2004

LÖSNINGAR, ÖVNING 6

Uppgift 1

Hastigheten v för en elektron i en bana med radien r bestäms av Newtons accelerationslag:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} \tag{1}$$

Motsvarande de Broglievåglängd är

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = h\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 r}{m_e e^2}} \tag{2}$$

Villkor för konstruktiv interferens:

$$2\pi r = n\lambda \Rightarrow r^2 = n^2 h^2 \frac{\varepsilon_0 r}{\pi m_e e^2} \Rightarrow r = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = n^2 \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \tag{3}$$

Detta överensstämmer helt med Bohrmodellen. Notera att kursboken använder beteckningen k_e för konstanten $1/(4\pi\varepsilon_0)$.

Uppgift 2

Vågfunktionerna för en partikel i en (en-dimensionell) låda med bredden L är

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4}$$

där $A = (2/L)^{1/2}$ bestäms av att sannolikheten att hitta partikeln någonstanns i lådan är 1.

Sannolikhet att hitta partikeln inom avståndet $L/3$ från en av väggarna? Sannolikhetstättheten är givit vid absolutkvadratet på den normerade vågfunktionen, $|\psi_n(x)|^2$, dvs för generellt n är sannolikheten

$$\int_0^{L/3} |\psi_n(x)|^2 dx + \int_{2L/3}^{L} |\psi_n(x)|^2 dx \tag{5}$$

$$= \int_0^{L/3} |A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)|^2 dx + \int_{2L/3}^{L} |A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)|^2 dx \tag{6}$$

$$= A^2\left(\frac{L}{6} - \frac{\sin\left(2\pi nL/(3L)\right)}{4\pi n/L} + \frac{L}{2} - \frac{L}{3} + \frac{\sin\left(2\pi n2L/(3L)\right)}{4\pi n/L}\right) \quad (7)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2\cos(\pi n)\sin(n\pi/3)}{2\pi n} \quad (8)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n\sin(n\pi/3)}{\pi n} \quad (9)$$

där vi utnyttjar att

$$\int \sin^2(az)dz = \frac{z}{2} - \frac{\sin(2az)}{4a} \quad (10)$$

och

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (11)$$

a) För $n = 1$ (grundtillståndet) är sannolikheten alltså

$$\frac{2}{3} - \frac{\sin(\pi/3)}{\pi} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}/2}{\pi} \approx 0.39 \quad (12)$$

b) För $n = 2$ (första exciterade tillståndet) är sannolikheten

$$\frac{2}{3} + \frac{\sin(2\pi/3)}{2\pi} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}/2}{2\pi} \approx 0.80 \quad (13)$$

c) För $n >> 1$ (mycket högt exciterad tillstånd): Vi vet att $\sin z/z \to 0$ för $z \to \infty$ och att andra termen i sannolikheten därför försvinnar för tillräckligt högt exciterad tillstånd.

$$\frac{2}{3} + \frac{(-1)^n\sin(n\pi/3)}{\pi n} \to \frac{2}{3} \text{ för } n \to \infty \quad (14)$$

d) Klassisk är sannolikhetstättheten jämnt fördelad i lådan, och sannolikheten att påträffa partikeln inom avståndet $L/3$ från de två väggarna är därför 2/3. *Vi ser alltså att för tillräckligt högt exciterade tillstånd blir det kvantfysiska resultatet samma som det klassiska!!*

Uppgift 3

a) The energies in the infinite potential well are $E_{n,atom} \propto (n/L)^2$. The merged well is twice as wide, so the new $E_{1,mol} = E_{1,atom}/4 = 0.75$ eV. Thus the total energy decreased by 4.5 eV, from 6 eV to 1.5 eV.

b) Now we have four electrons. The initial energy is 12 eV. We can't put them all in $E_{1,mol}$, so two must go into $E_{2,mol} = 4E_{1,mol} = 3$ eV. So, the total energy when the atoms are close is $2 \times 0.75 + 2 \times 3 = 7.5$ eV. The energy decreases by 4.5 eV. The binding has the same strength as before.

The moral of this story is that delocalization of electrons lowers the energy of the system.

Uppgift 4

Upplösningsförmågan hos ett cirkulärt objektiv med diameter D är $\theta_{min} \approx 1.22\,\lambda/D$. Blått ljus har våglängden ungefär $\lambda_b = 500$ nm.

Om vi i första hand räknar icke-relativistiskt får vi att elektronernas hastighet är $v = \sqrt{2E_{kin}/m_e} = 0.593 \cdot 10^8$ m/s, eller 20% av ljushastigheten c. Vi är därför på gränsen av att borda räkna relativistisk. Struntar vi i effekterna av relativitetsteorin kan vi räkna de Broglie våglängden för en elektron som $\lambda_e = h/p = h/(m_e v) = 1.227 \cdot 10^{-11}$ m $= 0.01227$ nm, med $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg och 1 eV$= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J.

Från relativitetsteorin vet vi att en partikels kinetiska energi är skillnaden på totala energin och vilo-energin, $E_{tot} = E_{kin} + m_e c^2$. Vi vet också att en partikels rörelsemängd är givit av $E_{tot}^2 = p^2c^2 + (m_e c^2)^2$, ur vilken vi löser $p = \sqrt{E_{kin}^2/c^2 + 2E_{kin}m_e}$ och får $\lambda_e = h/p = 1.221 \cdot 10^{-11}$ m $= 0.01221$ nm. Den relativistiska effekten är alltså blygsam.

Om avståndet till proben i båda ljus- och elektronmikroskop är L då är minsta storleken på proben om den ska ses $d = \theta_{min}L$, dvs $d_b/d_e = \theta_{min,b}/\theta_{min,e} = \lambda_b/\lambda_e \approx 40\,000$.