

Diffusion von Teilchen in turbulenten Oberflächenwellen

Elsebeth Schröder, Mogens T. Levinsen¹ und Preben Alstrøm¹

Department of Applied Physics, Vasa 11, Chalmers University of Technology, S-41296 Gothenburg, Sweden

¹Center for Chaos and Turbulence Studies, Niels Bohr Institute, Blegdamsvej 17, DK-2100 Copenhagen, Denmark

Abstract

Wir haben die Diffusion von Teilchen in turbulenten Oberflächenwellen theoretisch und experimentell untersucht. Es ist seit langem bekannt, daß man mit Messungen der relativen Bewegung von Teilchenpaaren andere Informationen hervorhebt als mit Messungen der Bewegung einzelner Teilchen. Wir haben beides untersucht, hier wird aber hauptsächlich über unsere Ergebnisse der relativen Diffusion berichtet. Oberflächenwellen können durch eine Hamiltonsche Theorie beschrieben werden. Von dieser Theorie leiten wir quantitative Voraussagen für die Korrelation von Geschwindigkeiten in Kapillar- und Schwerewellen her. Die theoretischen Voraussagen stimmen sehr gut mit unseren experimentellen Befunden überein.

1 Einführung

Obwohl Turbulenz schon seit mehr als hundert Jahren studiert wird und auch aus dem Alltag bekannt ist (wie z.B. im Wasser eines Schwimmbeckens mit 30 Schülern), gibt es immer noch keine vollständige Beschreibung von Turbulenz [1]. Im Gegensatz zu einigen anderen aktuellen Problemen der Physik kann man im Gebiet der Turbulenz schon in kleinen und im Prinzip einfachen Experimenten wertvolle Messungen machen. Ein solches Experiment soll hier diskutiert werden.

Experimentell können turbulente Strömungen zum Beispiel durch Messung der Bewegung kleiner Teilchen (“tracers”) oder Tinte verfolgt werden. Dabei nimmt man an, daß die Teilchen genau der Bewegung der Flüssigkeit folgen. Dies ist oft ein recht guter Ansatz.

In dieser Kurzfassung werden wir einige Ergebnisse unserer bisherigen Arbeit zur Diffusion in Oberflächenwellen kurz erläutern. Die Ergebnisse resultierten aus einer engen Zusammenarbeit zwischen Theoretikern und Experimentalphysikern am Niels Bohr Institut in Kopenhagen. Weitere Ergebnisse und Erklärungen sind in unseren Publikationen zu finden (s. Literaturliste).

2 Der experimentelle Aufbau

Wir beschreiben hier Diffusion von Teilchenpaaren in turbulenten Oberflächenwellen. Bereits 1926 hat L. F. Richardson erkannt [2], daß die *relative* Bewegung eines Teilchenpaares die Strömungen auf Längenskalen kleiner als dem Abstand der zwei Teilchen betont. Im Gegensatz zur Diffusion von einzelnen Teilchen [3] werden unsere Paarmessungen also hauptsächlich von Bewegungen des Wassers auf Längenskalen kleiner als dem Paarabstand R beeinflußt.

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. 1(a) skizziert. Die Petrischale (Durchmesser 8.4 cm) ist zu 1 cm Höhe mit Wasser gefüllt, und wird mit 260 Hz vertikal geschüttelt, wodurch die entstehenden kapillaren Oberflächenwellen eine Frequenz von 130 Hz und eine Wellenlänge von $\lambda = 2.6$ mm bekommen. Bei kleinen vertikalen Vibrationsamplituden A entstehen keine Wellen. Nur Amplituden größer als eine kritische Amplitude A_c verursachen Wellen, und je größer die Amplitude, desto stärker turbulent die Wellen. Unsere Messungen wurden bei relativen Amplituden $(A - A_c)/A_c$ von 0.05 bis 1.06 durchgeführt.

Die benutzten Teilchen sind Pilzsporen mit einer Größe von ungefähr $50 \mu\text{m}$. Sie schwimmen auf dem Wasser und bewegen sich mit der Flüssigkeit auf der Oberfläche. Die Bewegung der

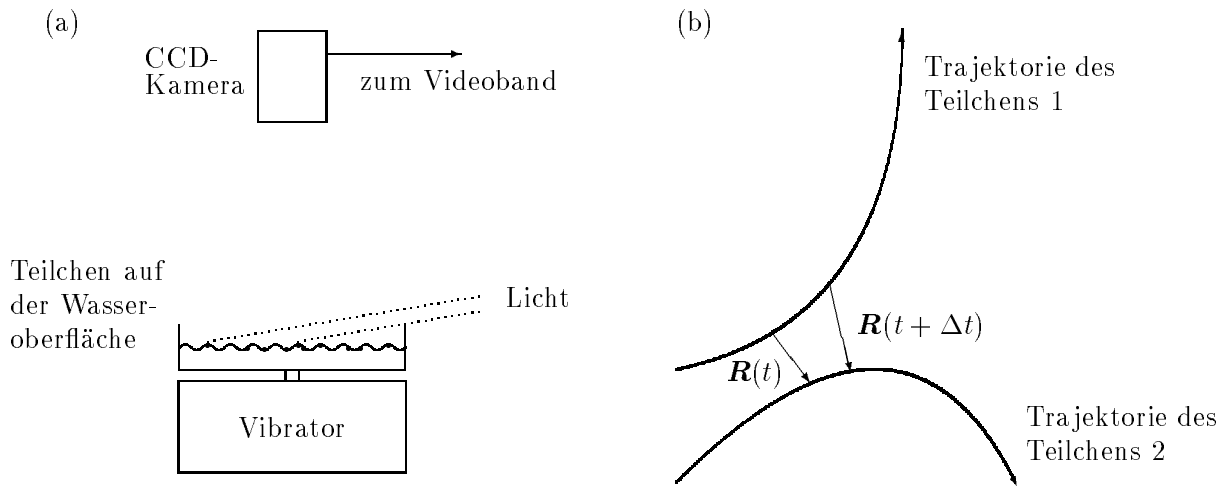


Abbildung 1: (a) Skizze des experimentellen Aufbaus. (b) Skizze von zwei Trajektorien, von oben gesehen.

Teilchen wird mit einer CCD-Kamera auf Videoband aufgezeichnet und wird später digitalisiert und als Trajektorien von mehreren Zentimetern abgespeichert. P. Alstrøm et al. [4] beschreiben den experimentellen Aufbau und die Vermessung der Trajektorien.

Alle Teilchen, die zu einem Zeitpunkt $t = 0$ einen Abstand von weniger als 4 mm haben, werden als Paare betrachtet. Der Abstand $R(t) = |\mathbf{R}(t)|$ (s. Abb. 1(b)) wird als Funktion der Zeit t seit der Paarbildung gespeichert. Die Teilchenpositionen wurden in Zeitabständen von $\Delta t = 20$ ms gespeichert. Als Maß der Diffusion des einen Teilchens relativ zur Position des anderen Teilchens berechnen wir dann die *relative Diffusivität*, die wir mit $\langle \Delta(R^2)/\Delta t \rangle_{R_0} = \langle (R(t+\Delta t)^2 - R(t)^2)/\Delta t \rangle_{R_0}$ definieren [5]. Hier bezeichnet $\langle \cdot \rangle_{R_0}$ die Mittelung über die Paare, die den Abstand R_0 haben.

3 Datenanalyse und Theorie

Wie erwartet finden wir, daß die relative Diffusivität mit dem Abstand der Teilchen wächst, und zwar ungefähr wie $\langle \Delta(R^2)/\Delta t \rangle_{R_0} \propto R_0^\alpha$ mit $\alpha = 0.9 \pm 0.15$ [5]. Das veranschaulicht das oben genannte Argument: je größer der Abstand der Teilchen, desto größer die Längenskalen der Prozesse, die die relative Bewegung beeinflussen.

Turbulenz in Oberflächenwellen unterscheidet sich von dreidimensionaler Turbulenz in Flüssigkeiten dadurch, daß es möglich ist, die Wellen bei kleinen Amplituden in einer linearen Näherung zu beschreiben und perturbativ kleine Effekte der Nichtlinearitäten beizufügen. Dies ermöglicht eine Beschreibung des Systems durch eine Hamiltonsche Theorie, wie in Zakharov et al. [6] beschrieben. Von dieser Hamiltonschen Theorie haben wir einen Ausdruck für das zweite Moment der relativen Geschwindigkeit \mathbf{v} der Teilchen hergeleitet [7]. Da die relative Diffusivität mit der relativen Geschwindigkeit wie $\Delta(R^2)/\Delta t \approx 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}$ in Zusammenhang steht, ist das zweite Moment der relativen Diffusivität mit der relativen Geschwindigkeit durch $\langle |\Delta(R^2)/\Delta t|^2 \rangle_{R_0} \approx 4R_0^2 \langle v_p^2 \rangle_{R_0}$ verknüpft, wobei $v_p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}/R$.

Für Kapillarwellen haben wir den Ausdruck $\langle v_p^2 \rangle \propto 1 - b(R/\lambda)^{-1/4}$ hergeleitet, mit der Konstante $b_{\text{theo}} = \Gamma(1/8)/(8\pi^{1/4}\Gamma(7/8)) \approx 0.649$. Beim Anpassen dieser Relation an unsere experimentellen Daten (s. Abb. 2) finden wir, daß $b_{\text{exp}} \approx 0.66$. Dieses unterstützt die oben erwähnte Hamiltonsche Theorie. Von der Herleitung der theoretischen Vorhersage wissen wir, daß sie nur für Abstände größer als die Wellenlänge $\lambda = 2.6$ mm gültig ist. Entsprechend sieht man in Abb. 2 für den Abstand $R_0 = 1$ mm eine Abweichung der Daten von der theoretisch bestimmten Kurve.

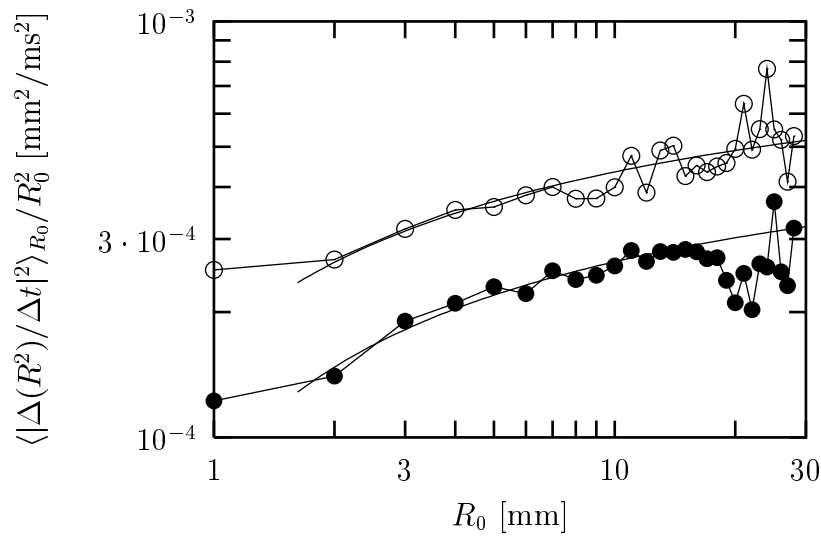


Abbildung 2: Das zweite Moment der relativen Geschwindigkeit, $\langle |\Delta(R^2)/\Delta t|^2 \rangle_{R_0}/R_0^2 \approx 4\langle v_p^2 \rangle_{R_0}$, als Funktion des Abstands R_0 , sowie eine Anpassung der theoretischen Vorhersage $\langle v_p^2 \rangle_{R_0} \propto 1 - b(R_0/\lambda)^{-1/4}$ (doppelt logarithmische Skala). Schwarze Punkte: $(A - A_c)/A_c = 0.13$, weiße Punkte: $(A - A_c)/A_c = 0.24$.

Für das Moment $\langle v_p^2 \rangle$ in *Schwerewellen* haben wir einen ähnlichen Ausdruck hergeleitet, jedoch ist es nicht möglich, in unserem Experiment Schwerewellen zu bilden.

4 Danksagungen

Für die gute Zusammenarbeit bei diesem Projekt seien Adam Espe Hansen und Jakob Sparre Andersen in Kopenhagen sowie Walter Goldberg in Pittsburgh herzlich gedankt. Die Arbeit wurde teilweise vom Dänischen Naturwissenschaftlichem Forschungsrat (SNF) und von der Fulbright-Kommission finanziert.

Literatur

- [1] D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*, 2. edition (Clarendon Press, Oxford, 1988); U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- [2] L. F. Richardson, Proc. R. Soc. (London) A **110**, 709 (1926).
- [3] E. Schröder, M. T. Levinsen und P. Alstrøm, Physica A **239**, 314 (1997); A. E. Hansen, E. Schröder, P. Alstrøm, J. S. Andersen und M. T. Levinsen, Phys. Rev. Lett. **79**, 1845 (1997).
- [4] P. Alstrøm, J. S. Andersen, W. I. Goldberg und M. T. Levinsen, Chaos, Solitons & Fractals **5**, 1455 (1995).
- [5] E. Schröder, J. S. Andersen, M. T. Levinsen, P. Alstrøm und W. I. Goldberg, Phys. Rev. Lett. **76**, 4717 (1996).
- [6] V. E. Zakharov, V. S. L'vov und G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [7] E. Schröder und P. Alstrøm, Phys. Rev. E **57**, 7329 (1998).