

mars 2003

FÖRELÄSNINGAR

VÅGOR FYSIK FÖR K1

G. Swenson
Fysik, 1999

KLASSIFICERING AV VÅGOR




A) Vad svänger?

- Elastiskt bundna partiklar → mekaniska vågor
- Elektriska och magn. fält → elektromagnetiska vågor (EM-vågor)

B) Svänger vågen ⊥ eller // utbredningsriktningen?

- ⊥ → Transversella vågor (t ex EM-våg)
- // → Longitudinella vågor (t ex ljudvågor)

C) Vilken karaktär har vågprofilen?

-  Puls (t ex knall)
-  Periodisk våg (t ex instrumentton)
-  Harmonisk våg (sinusformad) = "ren" ton (t ex stämgauffelton)

D) Hur ser vågfronten ut?

-  Plan våg
-  Sfärisk våg

E) I hur många dimensioner existerar vågen?

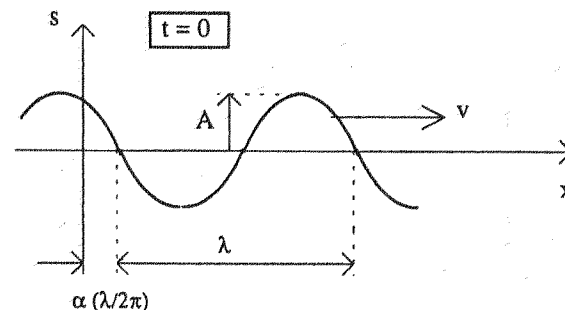
- 1-dim. våg (t ex våg på sträng)
- 2-dim. våg (t ex våg på damm)
- 3-dim. våg (t ex ljudvåg i luften)

D) Utbreder sig vågen?

- Ja → Fortskridande våg
- Nej → Stående våg

HARMONISK VÅG

Betrakta en våg med våglängden λ som utbreder sig i positiv x-riktning med hastigheten v.



Vågens frekvens (f) är det antal våglängder (λ) som passerar en punkt per tidsenhet

$$f = v/\lambda$$

I varje punkt på x-axeln medför vågen en sinusformad svängningsrörelse. Om det antages att denna i origo ($x = 0$) kan skrivas $s = A \sin(\omega t + \alpha)$, blir den för en godtycklig punkt på x-axeln

$$s(x, t) = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]$$

vilket är den harmoniska vågens **vågfunktion**.

- Benämningar:**
- A = amplituden
 - ω = vinkelfrekvensen = $\begin{cases} 2\pi f; f = \text{frekvensen} \\ 2\pi/T; T = \text{perioden} \end{cases}$
 - v = fashastigheten
 - α = fasvinkeln
 - [] = fasen

Alternativa sätt att skriva den harmoniska vågfunktionen:

$$s(x, t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right] = A \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

där $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ är cirkulära vågtalet.

Komplex representation: Liksom växelströmsstorheter kan harmoniska vågor skrivas i komplex form. Amplituden kommer då att motsvara den komplexa vågfunktionens belopp och fasen dess argument enligt följande:

$$\bar{s} = A \cdot e^{i(\omega t - kx + \alpha)} = \underbrace{A \cdot e^{i\alpha}}_{\bar{A}} \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

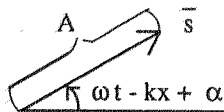
där \bar{A} är den komplexa amplituden.

Observera att den reella vågfunktionen i vår konvention är imaginärdelen av den komplexa \bar{s}

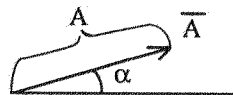
$$s = \text{Im}\{\bar{s}\}$$

(Det förekommer också att man skriver s som en \cos -funktion, varvid s istället blir realdelen av \bar{s} .)

Visarrepresentation: Alternativt kan en harmonisk våg representeras grafiskt med en visare. Visarens längd motsvarar då vågens amplitud och dess vinkel (i förhållande till en horisontell referensriktning) motsvarar vågens fas. Ofta är endast vågens amplitud och fasvinkel av intresse. Fasens tids- och lägesberoende kan då utelämnas. Visaren kommer i detta fall motsvara vågens komplexa amplitud.



Fullständig repr.



Förenklad repr.

Anm: Visarmetoden resp. den komplexa metoden används i praktiken då man har två eller flera harmoniska vågor av samma frekvens som överlagras och man vill beräkna den resulterande vågen (som i detta fall också blir harmonisk). Den förra metoden innebär att visare adderas vektoriellt, den senare att reglerna för addition av komplexa tal användes.

ALLMÄNNA VÅGOR

Godtyckliga odämpade plana vågor kan skrivas under formen

$$s(x, t) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right) \begin{cases} - \text{ger utbredning i pos. } x\text{-riktn.} \\ + \text{ger utbredning i neg. } x\text{-riktn.} \end{cases}$$

där v är vågens hastighet.

Funktioner av denna typ satisfierar **den allmänna vågekvationen**

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

som är en **linjär** partiell differentialekvation av andra graden. Linjariteten medför, att om två olika funktioner var för sig satisfierar denna ekvation, så gör även summan av dessa funktioner detta. Fysikaliskt innebär det att **superpositionsprincipen** är tillämplig för vågor.

Enligt **Fourier-analysen** kan en godtycklig våg betraktas som en överlagring av harmoniska vågor av olika frekvenser.

Periodiska vågor (med perioden T):

Vågens svängning i en given punkt (x) kan skrivas som en summa av harmoniska svängningar vars frekvenser är heltalsmultipler av den resulterande svängningens frekvens (grundfrekvensen):

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega t + \beta_n)$$

där $\omega = 2\pi/T$ och där A_n och β_n är delsvängningarnas amplituder resp faskonstanter.

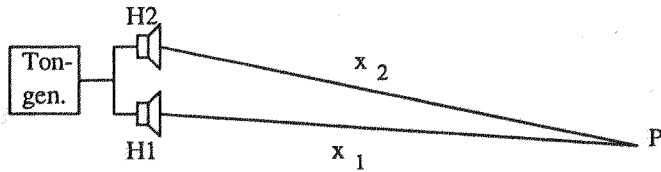
Icke-periodiska vågor:

I detta fall måste summationen ovan utbytas mot en integration över samtliga frekvenser:

$$s(t) = A_0 + \int_{\omega=0}^{\infty} A(\omega) \sin[\omega t + \beta(\omega)] d\omega$$

SUPERPOSITION AV VÅGOR (INTERFERENS)

A. Vågor med samma riktning och frekvens.



Ljudsvängningen i P:

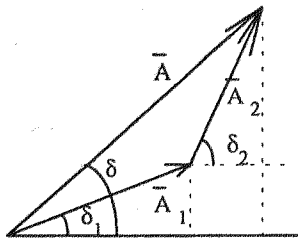
$$\begin{cases} \text{Från H 1: } s_1 = A_1 \sin(\omega t - kx_1) = A_1 \sin(\omega t + \delta_1) \\ \text{Från H 2: } s_2 = A_2 \sin(\omega t - kx_2) = A_2 \sin(\omega t + \delta_2) \end{cases}$$

För den resulterande (totala) svängningen i P antar vi:

$$s = s_1 + s_2 = A \sin(\omega t + \delta)$$

där A och δ kan bestämmas antingen med visare eller komplexa tal.

Visare:



Ur figuren fås (cos-teoremet):

$$\begin{cases} A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) \\ \tan \delta = \frac{A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2}{A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2} \end{cases}$$

Komplexa tal: Sätt $\bar{A} = A \cdot e^{i\delta} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = A_1 \cdot e^{i\delta_1} + A_2 \cdot e^{i\delta_2}$

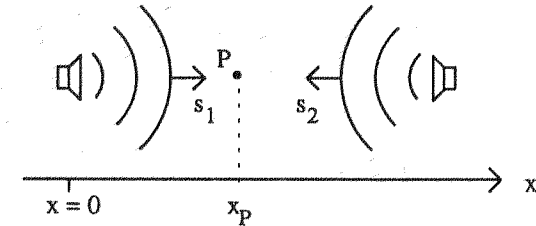
Med räkneregler för komplexa tal fås härur samma resultat som för visare. Kontrollera!

Konstruktiv interferens fås då $\cos \phi = 1$, d v s då $x_1 - x_2 = m \cdot \lambda$ där $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Då är $A = A_{\max} = A_1 + A_2$.

Destruktiv interferens fås då $\cos \phi = -1$, d v s då $x_1 - x_2 = (m + 1/2) \cdot \lambda$ där $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Då är $A = A_{\min} = |A_1 - A_2|$.

B. Motriktade vågor med samma frekvens. (Stående våg)

Betrakta de två motriktade vågorna s_1 och s_2



$$\begin{cases} s_1 = A_1 \sin(\omega t - kx) \\ s_2 = A_2 \sin(\omega t + kx + \phi) \end{cases} \quad (\text{Obs: Utbredn. i neg. } x\text{-riktn.})$$

Med $\delta_1 = -kx_P$ och $\delta_2 = kx_P + \phi$ blir den totala svängningen i P

$$s = A_1 \sin(\omega t + \delta_1) + A_2 \sin(\omega t + \delta_2) = A \sin(\omega t + \delta)$$

där enligt föregående sida

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(2kx + \phi)$$

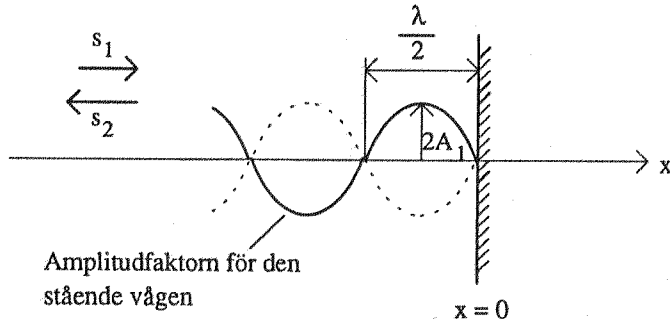
Tydligt är $A = A_{\min} = |A_1 - A_2|$ om $\cos(2kx + \phi) = -1$, varav följer att avståndet mellan närläggna minima är $\lambda/2$. (ϕ bestämmer läget av dem.)

Analogt fås $A = A_{\max} = A_1 + A_2$ om $\cos(2kx + \phi) = 1$.

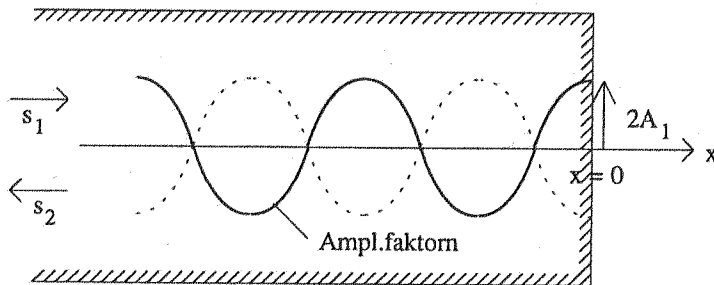
Den här typen av interferens inträffar alltid då vågor reflekteras. Om s_1 är den infallande vågen och s_2 den reflekterade, och vi dessutom antar att reflektionen är total, d v s $A_2 = A_1$, resulterar interferensen i en stående våg. Omvandling summa \rightarrow produkt ger:

$$s = s_1 + s_2 = \underbrace{2A_1 \cos(kx + \frac{\phi}{2})}_{\text{Amplitudfaktor}} \underbrace{\sin(\omega t + \frac{\phi}{2})}_{\text{Svängning}}$$

Reflektion mot tätare medium: Vågen kastar om fas (d v s fasen ändras med 180°) i samband med reflektionen. Vi har alltså $\phi = \pi$ om reflektionen sker vid $x = 0$ och vi får ett amplitudminimum - en nod - vid gränssytan:



Reflektion mot tunnare medium: Ingen fasomkastning. Den reflekterade vågen i fas med den infallande ($\phi = 0$) vid gränssytan ($x = 0$), vilket medför att resulterande stående vågen här får en buk.



Anm: Det förutsätts ovan att s_1 och s_2 representerar partikel-förskjutningen i en mekanisk våg t ex en ljudvåg. Som vi skall se senare i kursen kan man alternativt låta vågfunktionen uttrycka tryckvariationerna (p) i ljudvågen. Allmänt gäller då för den stående vågen att där s-vågen har en nod har p-vågen en buk och vice versa. Detta följer av att (som vi skall visa senare) $p \propto -\partial s / \partial x$.

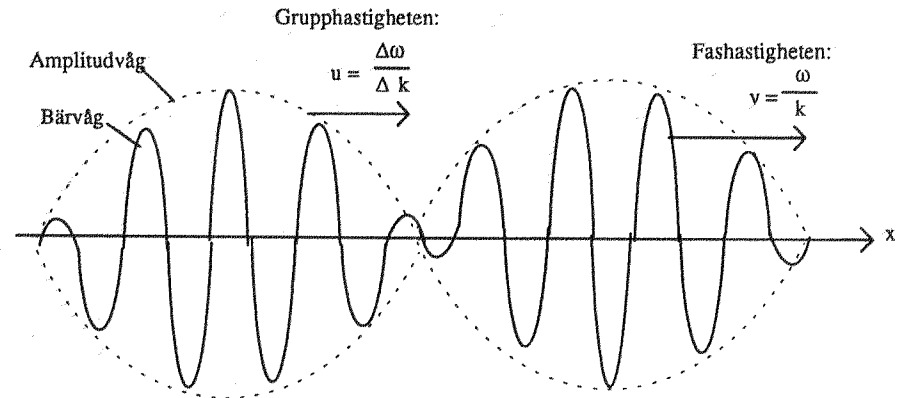
C. Vågor i samma riktning med olika frekvens. Svävningar.

Antag att vågorna har vinkelfrekvenserna $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ och $\omega_2 = \omega - \Delta\omega$ svarande mot vågtalen $k_1 = k + \Delta k$ och $k_2 = k - \Delta k$. Antag vidare att vågorna har samma amplitud (A). Vågorna kan då skrivas

$$\begin{cases} s_1 = A \sin [(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] \\ s_2 = A \sin [(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x] \end{cases}$$

Totalt fäs (summa \rightarrow produkt):

$$s = s_1 + s_2 = \underbrace{2A \cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x)}_{\text{Amplitudvåg}} \underbrace{\sin(\omega t - kx)}_{\text{Bärvåg}}$$



Svängningsfrekvensen: $f_{\text{svävn}} = |2 \Delta\omega| / 2\pi = |\omega_1 - \omega_2| / 2\pi = |f_1 - f_2|$

Samband mellan grupp hastigheten (u) och fashastigheten (v):

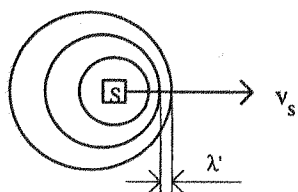
$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \frac{dv}{dk} = \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{1}{k} - \omega \cdot \frac{1}{k^2} \Rightarrow u = k \cdot \frac{dv}{dk} + v \text{ eller } u = v - \frac{dv}{d\lambda} \cdot \lambda$$

eftersom $k = 2\pi/\lambda$.

Obs: $dv/d\lambda \neq 0$ innebär **dispersion**.

DOPPLEREFFEKT

Om en ljudkälla av viss frekvens (f_s) rör sig i ett ljudutbredande medium med en hastighet v_s som är mindre än ljuhastigheten (v) i mediet, kommer ljudvågorna att pressas ihop framför ljudkällan och töjas ut bakom den. Den "deformerade" vågens våglängd längs rörelseriktningen blir



$$\lambda' = \frac{v - v_s}{f_s}$$

där v_s räknas positiv i punkter som källan närmar sig och negativ i punkter som källan avlägsnar sig från.

En mottagare (t ex en mikrofon eller ett öra) i vila i förhållande till mediet registrerar då frekvensen

$$f'_m = \frac{v}{\lambda'} = f_s \cdot \frac{v}{v - v_s}$$

Om mottagaren istället rör sig med hastigheten v_m ($v_m < v$) i samma riktning som vågen kommer den att registrera en lägre frekvens nämligen

$$f_m = f'_m \cdot \frac{v - v_m}{v} \Rightarrow \underline{f_m = f_s \cdot \frac{v - v_m}{v - v_s}}$$

Obs: v_s och v_m skall här räknas positiva i den mottagna vågens riktning (och negativa i motsatt riktning). Formeln kan även användas om mediet rör sig (t ex vid viss vindhastighet) under förutsättning av att v_s och v_m räknas som hastigheter relativt mediet.

Doppler-effekt för EM-vågor

För EM-vågor krävs inget vågutbredande medium och våghastigheten är $v = c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s oberoende av referenssystem. Formeln för den mottagna frekvensen måste i detta fall härledas med utgångspunkt från den speciella relativitetsteorin. Endast den relativa hastigheten (w) mellan sändare och mottagare får betydelse. Man erhåller:

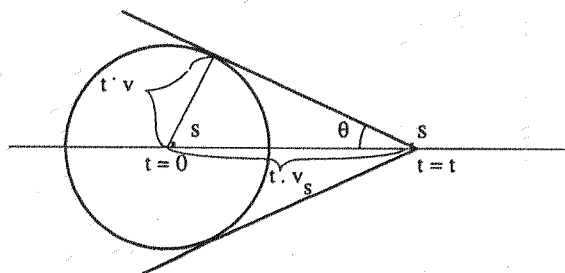
$$f_m = f_s \cdot \sqrt{\frac{c_0 - w}{c_0 + w}}$$

där $w > 0$ innebär att avståndet mellan sändare och mottagare ökar.

Obs: $f_m \approx f_s \cdot \frac{c_0 - w}{c_0} \approx f_s \cdot \frac{c_0}{c_0 + w}$ om $w^2 \ll c_0^2$

Överljudshastighet

Om $v_s > v$ vid ljudutbredning uppstår en bogvåg, vilket resulterar i en knall (en "ljudbang"),

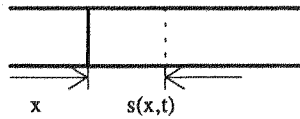


Ur figuren:

$$\sin \theta = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{M_a} \quad \text{där} \quad M_a = \frac{v_s}{v} \quad (= \text{Mach - talet})$$

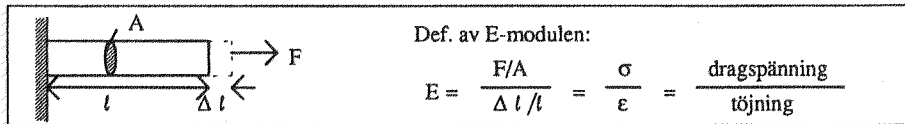
VÅGHASTIGHET OCH INTENSITET FÖR LJUDVÅGOR

A. Vågor i stav: Vi skall låta $s(x,t)$ vara förskjutningen av ett tvärsnitt från dess jämviktsläge och visa att

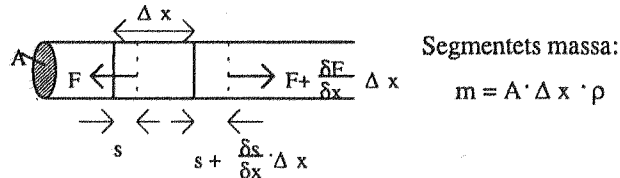


$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

där ρ och E är stavmaterialets densitet resp elasticitetsmodul. Vi identifierar denna ekvation som allmänna vågekvationen för en våg med hastigheten $v = \sqrt{E/\rho}$ och har därmed härlett ett uttryck för ljudhastigheten.



Härledning: Betrakta ett kort stavelement som i vila har längden Δx . Då vågen går fram i staven ändrar detta segment både läge och längd.



Dragkraften på segmentet: $F = E \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \cdot A$ då $\Delta x \rightarrow 0$

Segmentets acceleration: $a = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ då $\Delta x \rightarrow 0$

Resultande kraft på segm.: $F_{\text{res}} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x$

Newton: $F_{\text{res}} = m \cdot a \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(E \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \cdot A \right) \cdot \Delta x = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{V.S.V}$$

Anm: Istället för partikelförskjutningen $s(x,t)$ kan andra storheter användas för att beskriva ljudvågen, t ex dragspänningen $\sigma(x,t)$ eller tryckvariationerna $p(x,t)$. Vi inser lätt att

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

och

$$p = -E \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

B. Vågor i vätska: E- modulen ersätts här med kompressionsmodulen $K (= 1/\beta$ där $\beta =$ kompressibilitetskoefficienten).

Def: $K = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$ där $\begin{cases} \Delta P = \text{tryckökningen} (= p) \\ -\Delta V = \text{volymminskningen} \\ V = \text{totala volymen} \end{cases}$



Om vätskan befinner sig i ett rör med konstant tvärsnitt (A), eller allmänt vid plan våg, får K och E samma innebörd, ty då gäller för ett segment Δx :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \Delta x}{A \cdot \Delta x} = \frac{\partial s}{\partial x} \Rightarrow K = -\frac{P}{\partial s / \partial x} = E$$

Slutsats: Ljudhastigheten i en vätska blir alltså:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\beta \cdot \rho}}$$

C. Vågor i gas: För en gas bestäms K-modulen av sambandet mellan P och V. Tillståndändringen i en ljudvåg sker adiabatiskt (inget värmeutbyte inom vågen hinner ske). Enligt termodynamiken gäller då

$$P \cdot V^\kappa = \text{konst} \quad \text{där} \quad \kappa = \frac{C_p}{C_v} \quad (\approx 1,4 \text{ för tvåatomig gas})$$

C_p och C_v är molvärmegrad vid konstant tryck resp volym. Differentiering ger:

$$dP \cdot V^\kappa + P \cdot \kappa \cdot V^{\kappa-1} \cdot dV = 0 \Rightarrow K \equiv -\frac{dP}{dV/V} = \underline{\kappa \cdot P}$$

Slutsats: Ljudhastigheten i en gas kan skrivas:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot P}{\rho}}$$

För en ideal gas gäller allmänna tillståndslagen:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R \cdot T}{M} \quad \text{där} \quad \begin{cases} R = \text{allmänna gaskonstanten} \\ T = \text{absoluta temperaturen} \\ M = \text{molvikten} \end{cases}$$

Ljudhastigheten blir alltså i detta fall:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{M}}$$

Obs: v är oberoende av P , men $\propto \sqrt{T}$

Våghastighet för transversella vågor på sträng:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{där} \quad \begin{cases} F = \text{spännkraften} \\ \mu = \text{massan per längdenhet} \end{cases}$$

(Härledning: Se läroboken!)

LJUDVÅGORS ENERGITÄTHET OCH INTENSITET

Varje partikel (massan = m) i vågen utför en harmonisk svängningsrörelse (amplituden s_0 och vinkelfrekvensen ω) som har energin

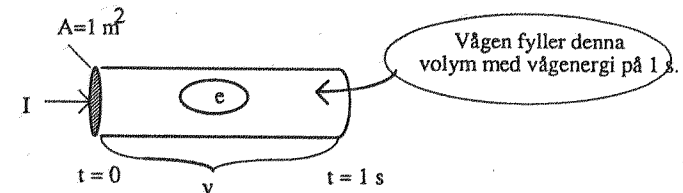
$$W_1 = \frac{1}{2} m (\omega \cdot s_0)^2 = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\text{max}}^2 \quad (\text{se svängningsläran})$$

där $\left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\text{max}}$ är vågens hastighetsamplitud.

Med n partiklar per volymsenhet blir densiteten $\rho = n \cdot m$ och energitätheten (energin per volymsenhet)

$$e = n \cdot W_1 = n \cdot \frac{1}{2} m \cdot s_0^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot s_0^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\text{max}}^2$$

Intensiteten är energiflödet per yt- och tidsenhet.



$$\therefore I = v \cdot e = \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} Z \cdot (s_0 \cdot \omega)^2$$

där $Z \equiv \rho \cdot v$ är den akustiska impedansen för mediet.

Med $s = s_0 \sin(\omega t - kx)$ fås $p = -K \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = -v^2 \cdot \rho \cdot (-k) \cdot s_0 \cos(\omega t - kx)$

d v s tryckamplituden blir $p_0 = v \cdot \rho \cdot \omega \cdot s_0 \Rightarrow s_0 \cdot \omega = p_0 / Z$.

$$\therefore I = \frac{p_0^2}{2Z}$$

HÖRSEL OCH LJUDENHETER

Hörbarhetsgränser:

Frekvens: 16 - 20000 Hz

Intensitet: $\underbrace{10^{-12} \text{ W/m}^2}_{\text{Hörseltröskel}} - \underbrace{1 \text{ W/m}^2}_{\text{Smärtgräns}}$

Ej hörbara ljud: $\begin{cases} \text{Infraljud (} f < 16 \text{ Hz)} \\ \text{Ultraljud (} f > 20.000 \text{ Hz)} \end{cases}$

Ljudstorheter:

Intensitet (W/m^2) - mäts ej direkt

Ljudtryck (N/m^2)- mäts med mikrofon

Ljudtrycket anges vanligen med tryckvariationens effektivvärde:

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} p^2 dt} \quad \text{där } T_i \text{ är integrationstiden vid mätningen.}$$

Med hänsyn till örats stora "mätområde" används ofta följande logaritmiska mått i decibel (dB):

$$\text{Ljudintensitetsnivån: } L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$\text{Ljudtrycksnivån: } L_p = 20 \log \frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{ref}}}$$

Referensvärden: $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$; $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$
(motsvarar hörseltröskeln)

Obs: I luft är $L_I \approx L_p$ ty för luft är akustiska impedansen $Z \approx 400 \text{ kg/m}^2\text{s}$.

Hörnivån (enhet: phon) är ett mått på ljudintryckets styrka och definieras enligt följande:

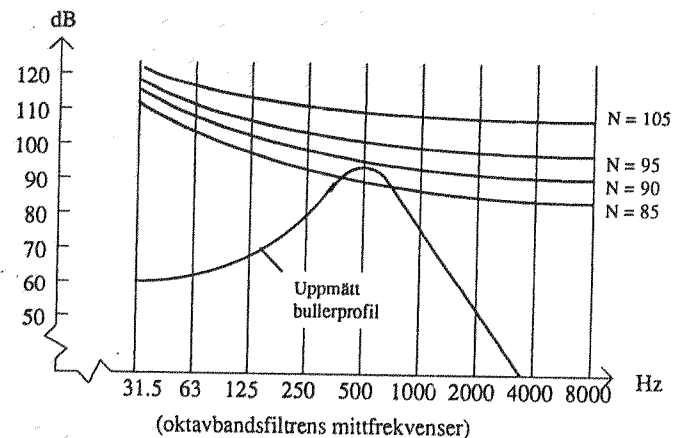
Vid 1000 Hz är phontalet = ljudintensitetsnivån L_I (i dB). Vid övriga frekvenser är phontalet det dB-tal vid 1000 Hz som ger samma styrka på ljudintrycket som det aktuella ljudet. (Se hörnivåkurvorna i läroboken.)

Ljudmätning: En ljudmätare, som används t ex för mätning av buller, omvandlar ljudtrycket till en elektrisk signal. Denna filtreras med något av de standardiserade filtren A, B, C eller D. Resultatet presenteras i logaritmiskt mått, t ex dB(A). Filtret A är vanligast och svarar grovt mot örats känslighetskurva vid mätliga ljudtrycksnivåer.

Ljudtrycksnivån kan också mätas ofiltrerad. Ljudmätaren låter då alla frekvenser (inom instrumentets bandbredd) väga lika tungt.

Vid noggrannare analys av ljud mäts ljudtrycksnivån inom olika frekvensområden i det hörbara området. Ofta används oktavbandsfilter för en dylik analys.

Buller är oönskat ljud som i lindriga fall ger irritation och i grava fall hörselskador. Skadligheten har man försökt få ett mått på med hjälp av ett bullertal N, som definieras ur kurvskaror på så sätt som visas i figuren. Bullret tillordnas bullertalet hos den kurva som går närmast över de mätta oktavbandsvärdena, d v s $N = 88$ i figuren. Buller med $N \leq 85$ anses ofarligt. För högre N måste exponeringstiden begränsas. Arbetskyddsstyrelsen anger den till max 5 h för $N = 90$, 2 h för $N = 95$ och 20 min för $N = 105$ (värdena gäller kontinuerligt buller).



TRYCK OCH PARTIKELHASTIGHET I LJUDVÅG

Som tidigare nämnts kan en ljudvåg uttryckas på olika sätt. Vågfunktionen kan t ex beskriva partikelförskjutningen, partikelhastigheten eller tryckvariationerna. Låt oss se hur dessa alternativa vågfunktioner är relaterade till varandra amplitud- och fasmässigt.

Ansätt partikelförskjutningen

$$\begin{cases} s = s_0 \sin(\omega t - kx) & (\text{våg i pos. } x\text{-riktn.}) \\ s = s_0 \sin(\omega t + kx) & (\text{våg i neg. } x\text{-riktn.}) \end{cases}$$

Partikelhastigheten blir då

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = \omega s_0 \cos(\omega t - kx) = \omega s_0 \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\partial s}{\partial t} = \omega s_0 \cos(\omega t + kx) = \omega s_0 \sin(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Tryckvågen i pos. x-riktning:

$$p = -\frac{K}{v^2 \rho} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = -v \cdot Z \cdot \left(-\frac{k}{\omega}\right) \cdot s_0 \cos(\omega t - kx) = Z \omega s_0 \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore p = Z \cdot \frac{\partial s}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} = p/Z$$

För tryckvågen i neg. x-riktning fås analogt:

$$p = -Z \omega s_0 \sin(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}) = -Z \cdot \frac{\partial s}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} = -p/Z$$

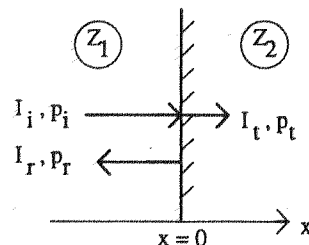
Slutsatser: Hastighetsvågen ligger alltid 90° före förskjutningsvågen.

Hastighetsvågen och tryckvågen ligger i fas då ljudet utbreder sig i pos. x-riktning och i motfas vid utbredning i neg. x-riktning.

Hastighets- och tryckvågens amplituder kan skrivas $(\partial s/\partial t)_0 = \omega \cdot s_0$ resp $p_0 = Z \cdot \omega \cdot s_0$ där s_0 är partikelförskjutningens amplitud, ω är vinkel-frekvensen och Z är mediets akustiska impedans.

REFLEKTION AV LJUDVÅGOR VID GRÄNSYTAN MELLAN ICKE-ABSORBERANDE MEDIER.

Infallande, reflekterad och transmitterad tryckvåg i komplex form:



$$\begin{cases} \bar{p}_i = \bar{p}_{io} \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)} \\ \bar{p}_r = \bar{p}_{ro} \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ \bar{p}_t = \bar{p}_{to} \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)} \end{cases}$$

Gränsvillkor: Tryck och partikelhastighet måste vara lika på båda sidor om gränsytan. För $x = 0$ skall då gälla:

$$\left. \begin{cases} \bar{p}_i + \bar{p}_r = \bar{p}_t \\ \frac{\bar{p}_i}{Z_1} - \frac{\bar{p}_r}{Z_1} = \frac{\bar{p}_t}{Z_2} \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} \bar{p}_{io} + \bar{p}_{ro} = \bar{p}_{to} \\ \frac{\bar{p}_{io}}{Z_1} - \frac{\bar{p}_{ro}}{Z_1} = \frac{\bar{p}_{to}}{Z_2} \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\bar{p}_{ro}}{\bar{p}_{io}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{\bar{p}_{to}}{\bar{p}_{io}} = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{cases}$$

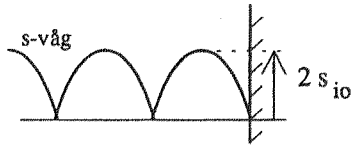
Slutsatser: 1) p_r och p_i är i fas, om $Z_2 > Z_1$ och i motfas om $Z_2 < Z_1$.
2) p_t och p_i är alltid i fas.

För partikelförskjutningen (s) och partikelhastigheten ($\partial s/\partial t$) kommer då gälla att reflekterad och infallande våg är i fas för $Z_2 < Z_1$ och i motfas för $Z_2 > Z_1$ (se föregående sida).

Reflektansen:
$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \frac{p_{ro}^2}{p_{io}^2} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

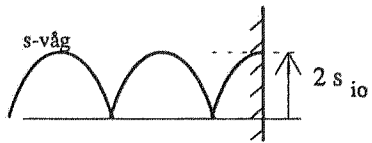
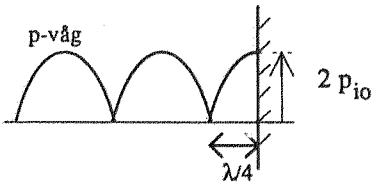
Transmittansen:
$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} = 1 - R$$

Specialfall:



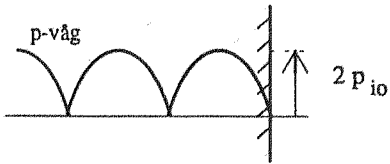
$$1) Z_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} s_{ro} = s_{io} \\ p_{ro} = p_{io} \end{cases} \quad \begin{cases} I_r = I_i \\ I_t = 0 \end{cases}$$

Kurvorna anger amplituden som funktion av läget för den stående vågen.

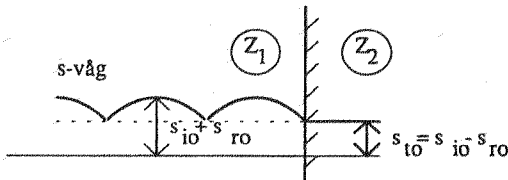


$$2) Z_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{ro} = s_{io} \\ p_{ro} = p_{io} \end{cases} \quad \begin{cases} I_r = I_i \\ I_t = 0 \end{cases}$$

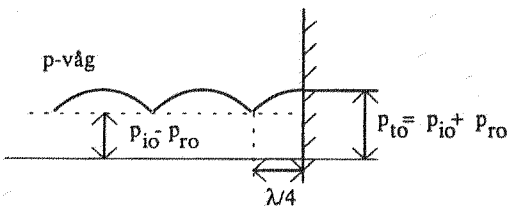
I de två specialfallen fås rena stående vågor.



Allmännare fall: ($Z_2 > Z_1$)



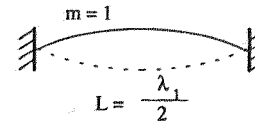
I medium (1) fås i detta fall en stående våg överlagrad på en fortskridande våg.



RESONANSSVÄNGNINGAR (STÅENDE VÅGOR) I STRÄNGAR OCH PIPOR

A. Sträng

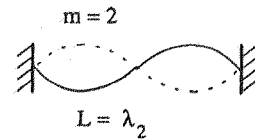
Endast svängningsmoder med noder infästningspunkterna är möjliga.



Grundtonen ($m = 1$) har längsta våglängden (λ_1) och lägsta frekvensen (f_1).

$$\lambda_1 = 2L \Rightarrow f_1 = v/\lambda_1 = v/2L$$

där L är strängens längd, v är våghastigheten och f är frekvensen.



1:a övertonen ($m = 2$) har

$$\lambda_2 = L \Rightarrow f_2 = v/\lambda_2 = (v/2L) \cdot 2$$

Allmänt gäller för mod m :

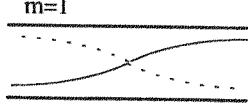
$$L = m \cdot (\lambda_m/2) \Rightarrow \lambda_m = 2L/m \Rightarrow f_m = m \cdot v/2L$$


Om spännkraften i strängen är F och massan per längdenhet är μ , blir de möjliga frekvenserna:

$$f_m = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

B. Öppen pipa

Endast svängningsmoder med bukar i de båda öppna ändarna är möjliga.

$m=1$  Grundtonen: ($L =$ pipans längd)
 $L = \lambda_1/2 \Rightarrow \lambda_1 = 2L \Rightarrow f_1 = v/2L$

$m=2$  1:a övertonen:
 $L = \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = L \Rightarrow f_2 = (v/2L) \cdot 2$

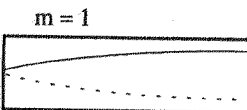
Allmänt för mod m : $L = m \cdot (\lambda_m/2) \Rightarrow \lambda_m = 2L/m \Rightarrow f_m = m \cdot v/2L$

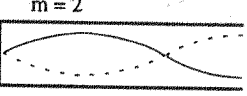
Om mediet i pipan är en gas med molekylvikten M och temperaturen T blir de möjliga frekvenserna:

$$f_m = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{kRT}{M}}$$

C. Sluten pipa

Endast svängningsmoder med nod i slutna ändan och buk i öppna ändan är möjliga.

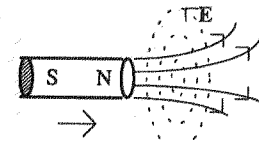
$m=1$  Grundtonen: ($L =$ pipans längd)
 $L = \lambda_1/4 \Rightarrow \lambda_1 = 4L \Rightarrow f_1 = v/4L$

$m=2$  1:a övertonen:
 $L = 3\lambda_2/4 \Rightarrow \lambda_2 = 4L/3 \Rightarrow f_2 = 3v/4L$

Allmänt för mod m : $\lambda_m = \frac{4L}{2m-1} \Rightarrow f_m = (2m-1) \cdot \frac{v}{4L}$

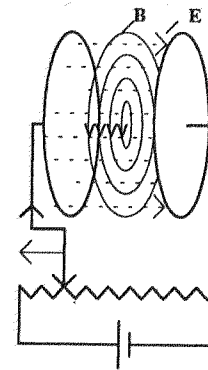
MAXWELLS EKVATIONER

Maxwell generaliserade Faradays och Amperes lagar enligt följande:



$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \rightarrow \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

Tolkning: Då \mathbf{B} -fältet varierar (magneten flyttas) induceras ett \mathbf{E} -fält med slutna fältlinjer.



$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I \rightarrow \oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_r \mu_0} \cdot d\mathbf{s} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

där I = laddningsströmmen och $\partial \psi / \partial t$ = förskjutningsströmmen

Tolkning: \mathbf{B} -fält uppstår inte bara p g a strömmande laddningar utan även p g a tidsvariabla elektriska fält.

Maxwell adopterade även "Gauss-lagarna":

$$\oint_S \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (3) \quad \text{och} \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4)$$

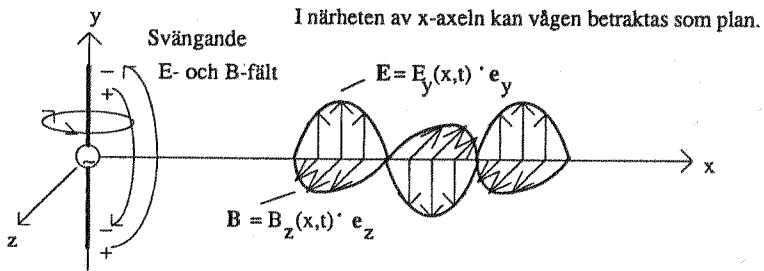
(1) - (4) kallas Maxwells ekvationer i integralform. De gäller för helt godtyckliga integrationsvägar resp -ytor. Om dessa väljes infinitesimalt små övergår ekvationerna i differential form. För ett isolerande medium ($Q = 0$; $I = 0$) fås då:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t & (1) \\ \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \partial \mathbf{B} / \partial t & (2) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (4) \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \text{rot } \mathbf{B} = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \\ \text{div } \mathbf{E} = 0 \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

där $\nabla = \mathbf{e}_x \cdot \partial / \partial x + \mathbf{e}_y \cdot \partial / \partial y + \mathbf{e}_z \cdot \partial / \partial z$ (vektoroperator)

ELEKTROMAGNETISKA VÅGOR (EM-VÅGOR)

Den ömsesidiga växelverkan som - enligt M:s ekv. (1) och (2) - råder mellan E- och B-fälten, medför att det alstras en harmonisk EM-våg då en antenn matas med sinusformad växelspanning.



E- och B-vågorna är båda transversella; de är inbördes ortogonala och (långt ifrån antennen) i fas med varandra. De satisfierar likadana våg-ekvationer, vilka lätt härledes ur M:s ekv (1) och (2). Man får

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Jämf. med allm. vågekv. ger våghastigheten: $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}}$

I vakuum (luft): $\epsilon_r = \mu_r = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \equiv c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Ur M:s ekvationer kan vi även visa att: $E_y = v \cdot B_z$
(gäller i varje punkt och varje ögonblick)

EM-vågens intensitet kan härledas med utgångspunkt från E- och B-fältens energitätheter (se kursen i ellära). Man finner

$$I = \frac{1}{2} v \cdot \epsilon_r \epsilon_0 \cdot E_0^2$$

där E_0 är E-vågens amplitud.

BRYTNINGSINDEX (n) OCH OPTISK VÄG (L)

Definition: $n \equiv \frac{c}{v}$ där $\begin{cases} c = \text{ljushastigh. i vakuum} \\ v = \text{ljushastigh. i aktuellt material} \end{cases}$

OBS! I icke-ferromagn. material: $\mu_r = 1 \Rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon_r}$

Ex: Luft: $n \approx 1,00$; Vatten: $n = 1,33$; Glas: $n \approx 1,5$

För given ljusfrekvens (f) får vi olika våglängder (λ_n) i medier med olika brytningsindex (n).

$$\lambda_n = \frac{v}{f} = \frac{c}{n \cdot f} = \frac{\lambda}{n} \quad \text{där } \lambda = \text{vakuumbvåglängden}$$

Anm: Inom det synliga våglängdsområdet minskar n något med ökande λ , d v s dispersionen ($= dn/d\lambda$) är negativ.

Definition: Den optiska vägen mellan två punkter i ett medium är lika med den geometriska vägen multiplicerad med mediets brytningsindex.

Anm: Vid beräkning av faslägen och fasdifferenser i samband med ljusvågors utbredning är det praktiskt att använda optisk väg (istället för geometrisk) eftersom man då genomgående kan räkna med vakuumbvåglängden.

Ex: Vågen $E = E_0 \sin(\omega t - k_n x) = E_0 \sin 2\pi(f \cdot t - \frac{x}{\lambda_n})$ utbreder sig från $x = x_1$ till $x = x_2$ i ett medium med brytningsindexet n. Bestäm fasdifferensen mellan punkterna vid tiden t.

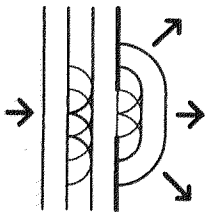
Lösning: Vågen kan skrivas $E = E_0 \sin 2\pi(f \cdot t - \frac{n \cdot x}{\lambda})$. Den sökta fasdifferensen blir

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = 2\pi(f \cdot t - \frac{n \cdot x_1}{\lambda}) - 2\pi(f \cdot t - \frac{n \cdot x_2}{\lambda}) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) \cdot n$$

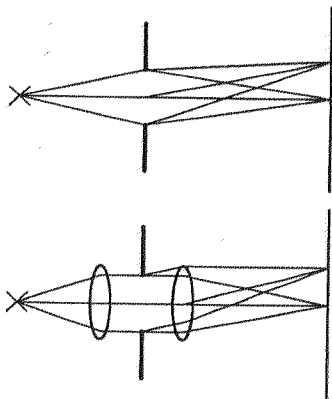
Optisk väg = L

DIFFRAKTION (BÖJNING)

Om en våg möter ett hinder (t ex en spalt), som begränsar dess vågfront, uppstår böjningsfenomen, d v s vågen ändrar delvis riktning. Fenomenet kan förstås med utgångspunkt från Huygens princip:



Varje punkt på en vågfront utgör en källa för cirkulära elementarvågor. Varje elementarvåg har samma frekvens och utbredningshastighet som primärvågen i den aktuella punkten. Primärvågens position vid en senare tidpunkt ges av envelopen till elementarvågorna.

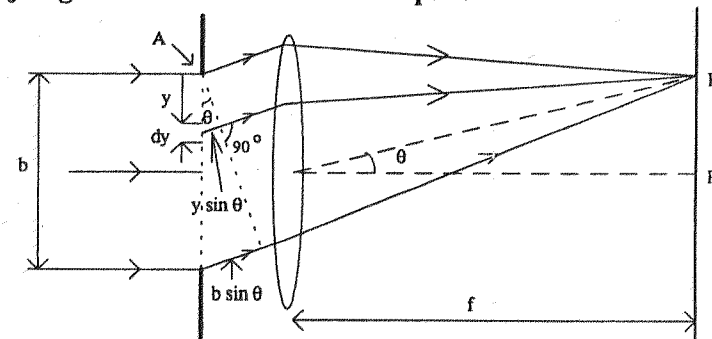


Fresneldiffraction: Ljuskälla och/eller skärm på ändligt avstånd från den böjande öppningen.

Fraunhoferdiffraction: Ljuskälla och skärm på oändligt avstånd från öppningen, d v s parallella in- och utgående strålar (plana vågor). Villkoren för Fraunhofer-diffraction realiseras i praktiken m h a linser. (Se figuren!)

Anm: Fresnel-diffraction är matematiskt svårare än Fraunhofer-diffraction eftersom det i förra fallet handlar om att hantera icke-plana vågor. Vi skall därför nöja oss med att härleda diffraktionsmönstret för en spalt i Fraunhofer-fallet.

Böjningsmönstret vid diffraction i spalt.



Elementarvågen från den strimma av spalten som ligger närmast A ger i P bidraget

$$E_o = \alpha \cdot dy \cdot e^{i(\omega t - k \cdot L_o)}$$

där dy är strimmans bredd, α är en konst. och L_o är optiska vägen mellan A och P.

För godtycklig strimma på avståndet y från A fås i P bidraget:

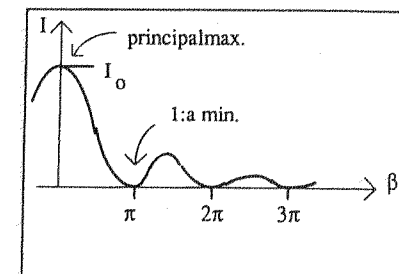
$$E_y = \alpha \cdot dy \cdot e^{i(\omega t - k L_o - k y \sin \theta)} = \underbrace{\alpha \cdot dy \cdot e^{-i k (L_o + y \sin \theta)}}_{\text{komplexa ampl. i P}} e^{i \omega t}$$

Totala komplexa ampl. i P blir då

$$E = \int_0^b \alpha \cdot e^{-i k L_o} \cdot e^{-i k y \sin \theta} dy = \alpha \cdot e^{-i k L_o} \cdot \frac{e^{-i k b \sin \theta} - 1}{-i k \sin \theta} = \alpha \cdot b \cdot e^{-i k L_o} \cdot e^{-i \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \quad \text{där} \quad \beta = \frac{k b \sin \theta}{2}$$

$$\text{Intensiteten i P: } I \propto |E|^2 = \alpha^2 b^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

$$I = I_o \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$



UPPLÖSNINGSFÖRMÅGA

Medan en spalt ger upphov till diffraktionsmönster bestående av raka band med olika intensitet, erhåller man vid en cirkulär öppning ett ringformat mönster. En kikare eller ett mikroskop avbildar aldrig - p g a diffraktionen - ett punktformigt objekt helt punktformigt, utan som ett sådant mönster. Intensiteten blir fördelad huvudsakligen inom den cirkel som motsvarar mönstrets 1:a minimum. Detta sätter en absolut gräns för upplösningen hos varje optiskt instrument.

Gränsen för hur nära varandra två punktformiga objekt kan befinna sig och ändå synas upplösta, brukar anges med Rayleighs kriterium:

Minsta avstånd för upplösning är det avstånd vid vilket principalmaximum för ena bilden faller på den andra bildens 1:a minimum.

För en spaltformig öppning blir villkoret för 1:a min (se föreg. sida):

$$\beta = \pi \Rightarrow \frac{k b \sin \theta_1}{2} = \pi \Rightarrow \frac{\pi b \sin \theta_1}{\lambda} = \pi \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{b}$$

där θ_1 är den diffraktionsvinkel (θ) vid vilken bøjningsmönstrets 1:a minimum inträffar.

Då θ_1 är en liten vinkel fås:

$$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{b}$$

(Obs: Radianer !)

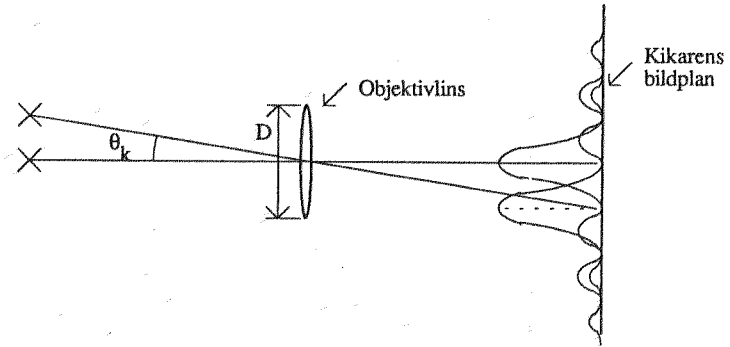
För en cirkulär öppning, t ex ett kikarobjektiv, kan man visa att motsvarande uttryck är

$$\sin \theta_1 = \frac{1,22 \lambda}{D} \quad \text{resp} \quad \theta_1 \approx \frac{1,22 \lambda}{D}$$

där D är öppningens diameter.

OBS: Kort våglängd och stor öppning leder till litet θ_1 och därmed hög upplösning.

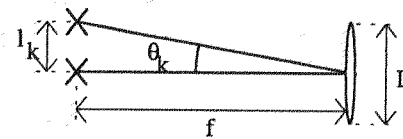
Vinkelupplösning: För en kikare kan lämpligen upplösningens förmågan anges som det minsta vinkelavståndet mellan två punktformiga ljuskällor som ger upplösning enligt R:s kriterium (den s k kritiska vinkelseparationen θ_k).



Som framgår av figuren blir θ_k identisk med diffraktionsvinkeln θ_1 för 1:a minimum.

$$\therefore \sin \theta_k = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \theta_k \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \quad \text{vid små } \theta_k$$

Längdupplösning: För ett mikroskop eller en lupp är det naturligt att istället för θ_k ange ett kritiskt avstånd l_k - det minsta upplösbara avståndet.



Enligt ovan är

$$\sin \theta_k = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

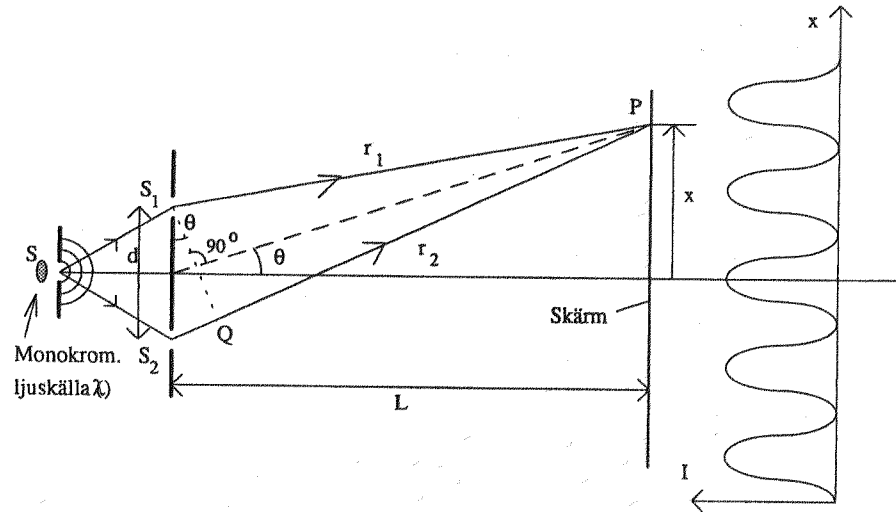
där $\theta_k \approx \frac{l_k}{f}$ (liten vinkel)

f = linsens brännvidd

$$\therefore l_k = 1,22 \lambda \cdot \frac{f}{D}$$

Tumregel: Eftersom i praktiken $(f/D)_{\min} \approx 1$ är $(l_k)_{\min} \approx \lambda$.

YOUNGS DUBBELSPALT



Intensiteten i P bestäms av (optiska) vägdifferensen

$$\Delta r = r_2 - r_1$$

Om $d \ll L$ och θ är en liten vinkel fås

$$\Delta r = S_2Q \approx d \cdot \theta \approx d \cdot \frac{x}{L}$$

Motsvarande fasdiff. blir: $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta r = \frac{2\pi \cdot d}{\lambda \cdot L} \cdot x$

Intensiteten ($\propto \text{ampl.}^2$) i P kan skrivas $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi$ där I_1 och I_2 är bidragen från spalt S_1 resp S_2 . Med $I_1 = I_2 = I_0$ fås

$$I = 2I_0(1 + \cos \phi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \cdot d}{\lambda \cdot L} \cdot x \right)$$

$$\begin{cases} I_{\max} = 4 I_0 \text{ fås då } \phi = 2m\pi & \Rightarrow x = m \cdot \lambda \cdot L / d \\ I_{\min} = 0 \text{ fås då } \phi = (2m+1)\pi & \Rightarrow x = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda \cdot L / d \end{cases}$$

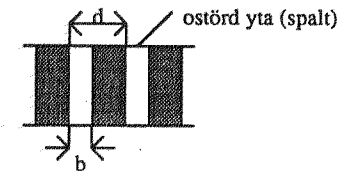
där $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

GITTER

Ett optiskt gitter består i princip av ett stort antal parallella spalter med samma inbördes avstånd. Två huvudtyper:

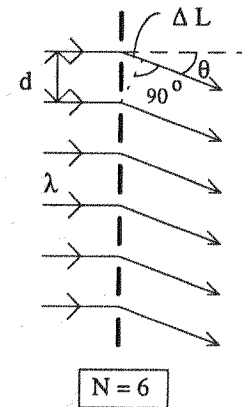
Transmissionsgitter: Ritsad plan glasplatta.

Reflektionsgitter: Ritsad metallspiegel (plan eller konkav)



$d =$ gitterkonstanten

Betrakta ett transmissionsgitter som belyses vinkelrätt (se fig.). Det utgående ljusets intensitet i olika riktningar (θ) kan enklast uttryckas med variabeln γ , som är halva fasdifferensen mellan närliggande spalters strålar. Ur figuren fås:



$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\Delta L}{2} = \frac{k \cdot d \cdot \sin \theta}{2} \quad \text{där } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Intensitetsfördelningen blir (se härledning i boken) om oändligt smala spalter antages

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N \gamma}{\sin^2 \gamma} \quad \text{där } N = \text{antalet spalter}$$

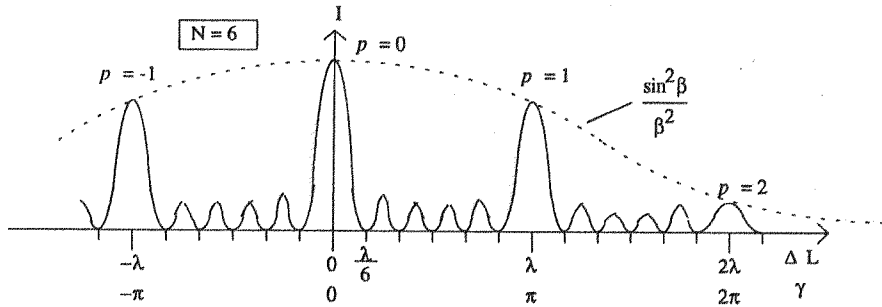
Villkor för principalmaxima (alla strålar samverkar):

$$(\Delta L =) d \cdot \sin \theta = p \cdot \lambda \quad (\text{"Gitterekvationen"})$$

där $p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (= spektrats ordning)

Ljusminima fås då $\sin N\gamma = 0 \Rightarrow d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda / N$ där $|m| = \text{heltal} \neq 0, N, 2N, 3N, \dots$ (För $|m| = 0, N, 2N, 3N, \dots$ fås princ. max. enl. ovan)

Mellan ljusminima förekommer även sekundära ljusmaxima som blir alltmer försumbara ju större N är (se figur på nästa sida).



I figuren ovan har hänsyn tagits till att spalterna i gittret har ändlig bredd d v s intensitetsformeln har kompletterats med en diffractionsfaktor:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N \gamma}{\sin^2 \gamma} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad \text{där } \beta = \frac{k \cdot b \cdot \sin \theta}{2}$$

Kromatisk upplösningsförmåga:

"Avståndet" från ett principalmax. till närmaste min. (mätt i ändrad vägdiff. mellan närliggande strålar) blir tydligen λ/N . Ändringen i vägdiff. vid en våglängdsändring $\Delta\lambda$ fås genom differentiering av gitterekvationen:

$$\Delta(d \sin \theta) = p \cdot \Delta\lambda$$

Slutsats: Två våglängder - λ och $\lambda + \Delta\lambda$ - ger enligt R:s kriterium knappt upplösbara principalmaxima i spektraordning p om

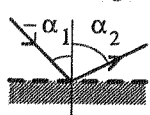
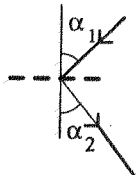
$$p \cdot \Delta\lambda = \lambda / N \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N \cdot p \quad (= \text{Krom. upplösn förm.})$$

Fotnot: Gitterekvationen vid snett ljusfall blir

Transmissionsgitter

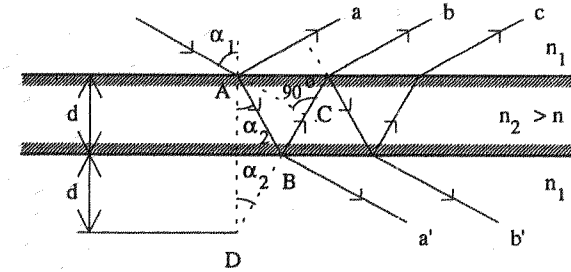
Reflektionsgitter

$$d(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) = p \cdot \lambda$$



där α_1 och α_2 räknas positiva på samma sida av normalen (se fig.).

INTERFERENS I TUNNA SKIKT



Geometrisk vägdifferens mellan strålarna a och b vid vågfronten AC är

$$(\Delta L)_{geom.} = ABC = DBC = 2 d \cos \alpha_2$$

Motsvarande optiska vägdifferens:

$$\Delta L = n_2 \cdot (\Delta L)_{geom.} = \underline{2 n_2 d \cos \alpha_2}$$

OBS: ΔL är oberoende av n_1 i omgivande medium.

Fasdifferensen mellan strålarna a och b är då

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta L + \pi$$

där π ($= 180^\circ$) tar hänsyn till att en av strålarna (a) reflekteras mot "tätare medium" (vilket b inte gör). Vid reflektion mot tätare medium sker alltid ett fassprång på 180° . (Jämför mekaniska vågor!)

Maximal reflekterad intensitet fås då $\Delta \phi = m \cdot 2\pi$; ($m = 1, 2, 3, \dots$)
d v s då

$$2 n_2 d \cos \alpha_2 = (2m-1) \frac{\lambda}{2}$$

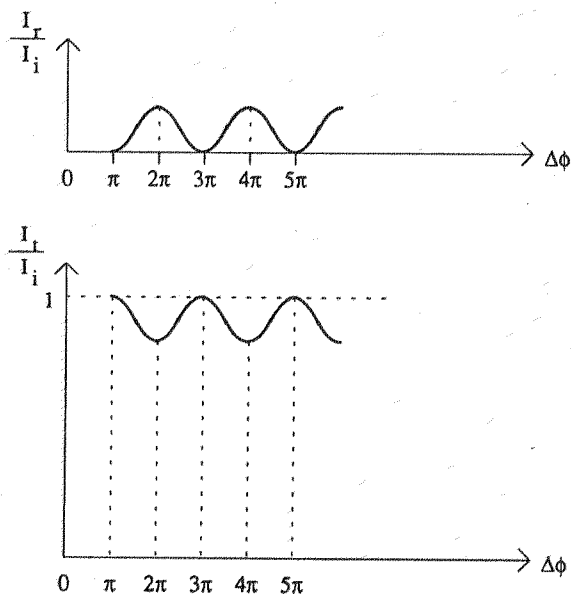
Minimal reflekterad intensitet fås då $\Delta \phi = (2m-1)\pi$; ($m = 1, 2, 3, \dots$)
d v s då

$$2 n_2 d \cos \alpha_2 = m \cdot \lambda$$

OBS: Samma resultat fås om $n_2 < n_1$.

Intensitetsvariationer vid tvåstråleinterferens:

Två stråleinterferens är tillämplig vid låg reflektans hos gränssytor (några få %). Då varierar den totalt reflekterade intensiteten (I_r) ungefär som $\cos^2(\Delta\phi/2)$ (jmf. dubbelspalten). Om absorptionen i skiktet försummas blir den transmitterade intensiteten (I_t) komplementär d v s $I_t = I_i - I_r$ (energiprincipen), där I_i är den infallande intensiteten.



Även de transmitterade strålarna interfererar alltså, men de relativa intensitetsvariationerna bli betydligt mindre än för det reflekterade ljuset.

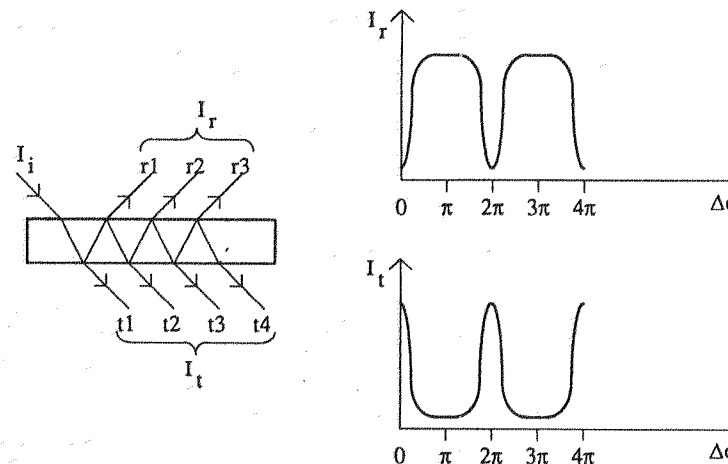
Anm: Observera att $\Delta\phi$ avser fasdifferensen mellan de två "första" reflekterade strålarna (a och b). Fasdifferensen mellan övriga "närliggande" strålar, t ex b och c eller a' och b', blir

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta L = \Delta\phi - \pi$$

där ΔL är optiska vägdiff. mellan närliggande strålar.

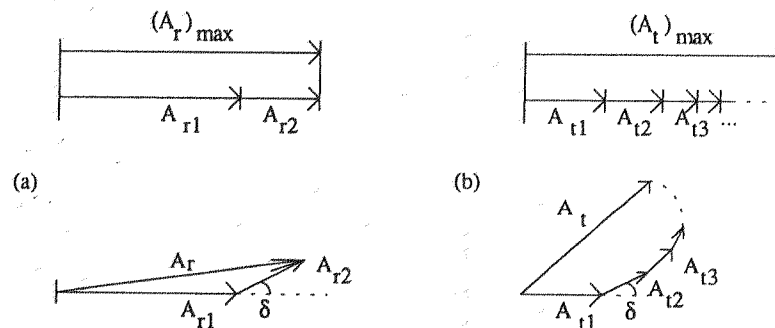
Multipelinterferens.

Om gränssytornas reflektans ökas genom halvförsilvring måste fler än två strålar beaktas, vilket medför att intensitetsvariationerna blir annorlunda. Fortfarande kan dock villkoren för max. och min. i I_r och I_t beräknas utgående från de två "första" strålarna. Däremot blir skärpan för $(I_r)_{\min}$ och $(I_r)_{\max}$ nu mycket större än för $(I_r)_{\max}$ och $(I_r)_{\min}$ (se fig.). Detta utnyttjas mättekniskt i t ex Fabry-Perots interferometer.



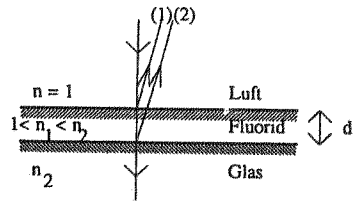
Förklaring: En liten avvikelse (δ) från villkoret för $(I_r)_{\max}$, så att $\Delta\phi = (2m - 1)\pi + \delta$, får liten inverkan på den totala reflekterade amplituden (A_r) eftersom den första delvägen dominerar starkt vid hög reflektans (fig a).

Motsvarande avvikelse från villkoret för transmissionsmax. ($I_t)_{\max}$ ger stor inverkan på amplituden A_t (fig b).



TILLÄMPNINGAR PÅ INTERFERENS I SKIKT

A. Antireflexbehandling:



Fluoridskiktets tjocklek (d) bestäms så att destruktiv interferens erhålles mellan (1) och (2) vid \perp infall.

$$\therefore 2n_1 \cdot d = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda; \quad m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

OBS: Båda strålarna (1) och (2) har reflekterats mot tätare medium.

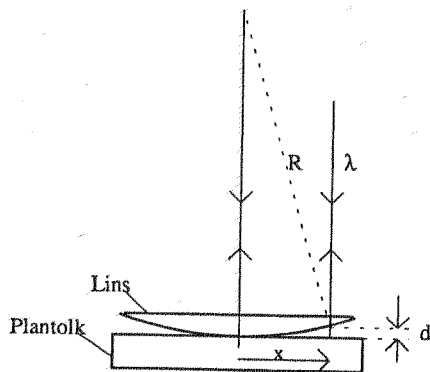
Slutsats: Minsta skiktjockleken blir ($m = 0$)

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_1} \quad \text{där } \lambda \text{ väljes mitt i det synliga området.}$$

För att få optimal utsläckning av det reflekterade ljuset bör reflektansen i båda gränssytor vara ungefär lika. Enligt Fresnels lagar, som genomgås vid nästa föreläsning, innebär detta villkor att

$$\left(\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}\right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 \Rightarrow \underline{n_1 = \sqrt{n_2}}$$

B. Mätning av ytjämnhet med plantolk:



Ex: Bestämning av krökningsradie (R) hos lins.

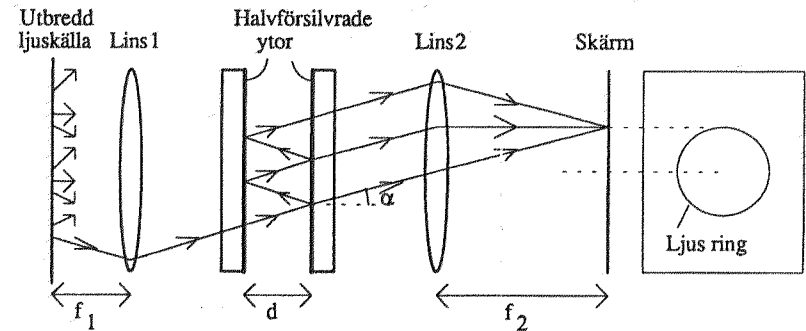
Min. i refl. ljus (mörk ring) erhålles då

$$d = m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{där } m = 0, 1, 2, \dots$$

Om ringens radie är x för ring m och $d \ll R$ fås:

$$R \approx \frac{x^2}{2d} = \frac{x^2}{m \cdot \lambda}$$

C. Fabry-Perot interferometern.

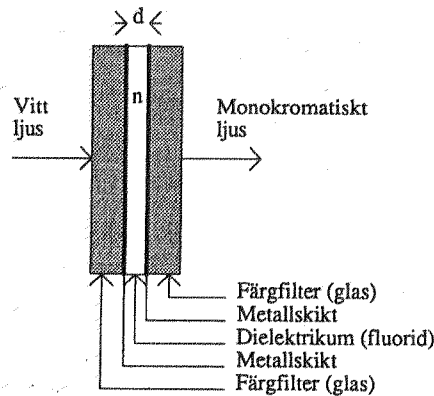


Villkor för ljus ring: $2nd \cos \alpha = m \cdot \lambda \quad m = \text{heltal}$

Användning: Mätning av våglängder (speciellt finstrukturen atomernas spektra samt laserspektra). Varje specifik våglängd ger upphov till ett eget ringsystem i interferensbilden.

Alternativ konstruktion: Ljuset infaller vinkelrätt ($\alpha = 0$) och d varieras.

D. Interferensfilter:



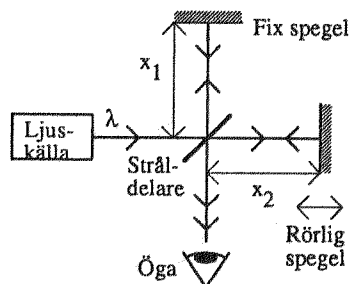
Samma princip som ovan. Dielektrikumskiktets tjocklek (d) väljes så litet att transmission endast erhålles för ett λ i färgfiltrets våglängdsområde.

Vid vinkelrätt infall fås

$$\lambda = \frac{2nd}{m}$$

där $m = 1, 2, 3, \dots$

MICHELSONS INTERFEROMETER



Stråldelaren är en glasplatta som är halvförsilvrad på ena sidan och antireflexbehandlad på andra. Med utbredd ljuskälla fås cirkulära interferensfransar om speglarna är exakt vinkelräta; om icke fås linjära fransar.

Villkor för ljusminimum blir i första fallet:

$$2d \cos \theta = m \cdot \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

där $d = x_2 - x_1$ och $\theta =$ ljusets infallsvinkel. Observera att det ljus som reflekteras mot stråldelaren kommer att reflekteras två gånger mot tätare medium, medan det ljus som transmitteras endast kommer att reflekteras en gång mot tätare medium innan det når ögat.

Om den rörliga spegeln förskjuts, d v s d ändras ett stycke Δd , leder detta till att interferensmönstret förskjuts ett antal steg (r). Man finner (om $\theta = 0$):

$$2 \Delta d = r \cdot \lambda$$

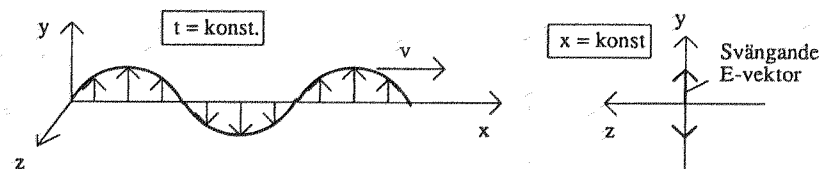
där vänstra ledet är ändringen i ljusstrålarnas gångvägsskillnad.

Användning:

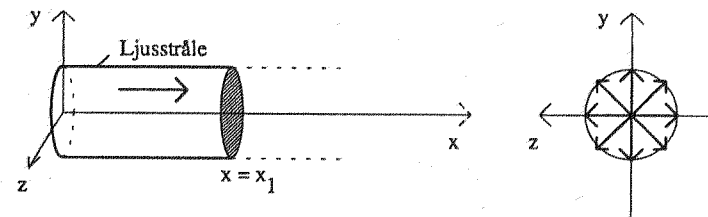
1. Längdmätning (uppmätningen av arkivmetern).
2. Våglängdsbestämningar. (Vågmeter)
3. Bestämning av brytningsindex för gas.
4. Detektering av ev. "etervind". (Michelson-Morleys försök)

LJUSETS POLARISATIONSFORMER

För den EM-våg som inledningsvis beskrevs, gällde att E-vektorn hade en konstant svängningsriktning (längs y-axeln) och att E-vågens profil hela tiden låg i samma plan (xy-planet). En sådan våg kallas linjär- eller plan-polariserad.

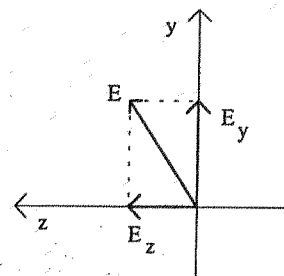


Ljusbågen från en vanlig ljuskälla är opolariserad. Detta innebär att E-vektorn ständigt och slumpartat (c:a 10^8 ggr/s) byter riktning i yz-planet.



Oberoende av ljusets polarisationsform bestäms ljusintensiteten av tidsmedelvärdet $\overline{E^2}$ d v s $I \propto \overline{E^2}$.

Obs: E-vektorn i opolariserat ljus kan i varje ögonblick delas upp i två vinkelräta komponenter (t ex E_y och E_z).



Opolariserat ljus kan därför betraktas som en överlagring av två \perp planpolariserade ljusvågor vars faslägen och fasdifferens ständigt ändras.

Av figuren framgår att

$$E^2 = E_y^2 + E_z^2 \Rightarrow \overline{E^2} = \overline{E_y^2} + \overline{E_z^2}$$

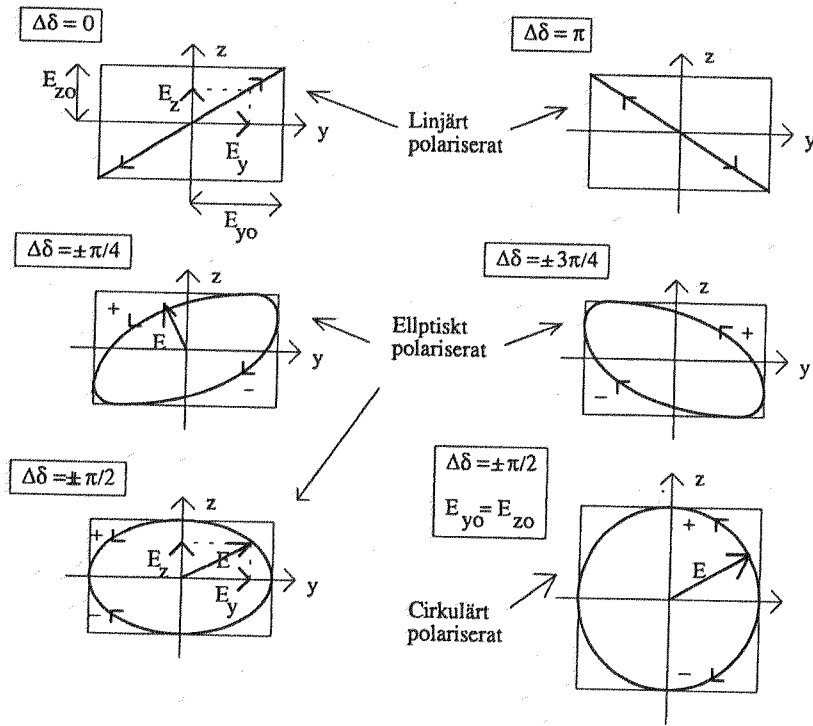
$\therefore I = I_y + I_z$ där $I_y = I_z$ för helt opol. ljus.

Elliptiskt och cirkulärt polariserat ljus fås om två planpolariserade ljusvågor, vars svängningsplan är vinkelräta mot varandra, och som har konstant fasdifferens ($\Delta\delta$), överlagras. Om vågorna utbreder sig i pos. x-riktning och svänger i y- resp. z-led, kan de skrivas

$$\begin{cases} E_y = E_{y0} \sin(\omega t - kx + \delta_y) \\ E_z = E_{z0} \sin(\omega t - kx + \delta_z) \end{cases} \quad (\text{med fasdiff. } \Delta\delta = \delta_y - \delta_z)$$

I det allmänna fallet kommer spetsen på den resulterande E-vektorn att beskriva en ellips (vid konstant x och löpande t) i yz-planet. I specialfallet $E_{y0} = E_{z0}$ och $\Delta\delta = \pm \pi/2$ fås en cirkelrörelse hos E-vektorns spets.

Specialfall:



DIKROISM OCH MALUS LAG

Dikroistiska kristaller (t ex turmalin) har egenskapen att absorbera allt ljus som har E-vektorn i en bestämd kristallriktning, medan ljus där E-vektorn svänger \perp denna riktning dämpas obetydligt.

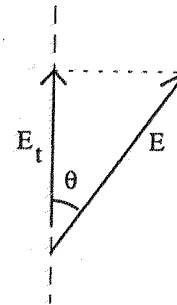
Man kan tillverka tunna filmer (med orienterade molekyldedjor) som får dikroistiska egenskaper. Sådana filmer kallas polaroider.

Användning: 1) Framställning av planpolariserat ljus.
2) Undersökning av polarisationstillståndet hos ljus.

Malus lag anger hur stor intensitet (I) som en polaroid släpper igenom då den belyses med planpolariserat ljus med intensiteten I_0 . Man har

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

där θ är vinkeln mellan det infallande ljusets svängningsriktning och polaroidens genomsläpps riktning.

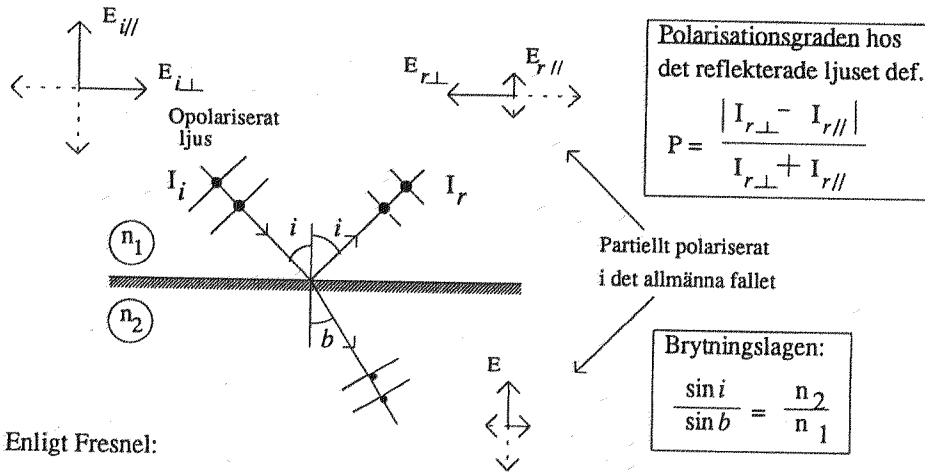


Lagen följer av att endast den komponent (E_t) av ljusets E-vektor som ligger i polaroidens genomsläppsriktning transmitteras.

OBS: Om en polaroid belyses med opolariserat ljus eller cirkulär-polariserat ljus släpps alltid halva intensiteten igenom. ($I = I_0/2$)

FRESNELS LAGAR

Fresnel visade att då ljus reflekteras mot gränssytan mellan två genomskinliga medier gäller olika lagar för ljus som svänger \perp resp \parallel infallsplanet (planet som innehåller infallande stråle och gränssytans normal).



Enligt Fresnel:

$$\begin{cases} \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{\sin(i-b)}{\sin(i+b)} \\ \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{\tan(i-b)}{\tan(i+b)} \end{cases}$$

där de vänstra leden är förhållanden mellan reflekterade och infallande vågors komplexa amplituder.

Motsvarande intensitetsrelationer blir då

$$\begin{cases} \frac{I_{r\perp}}{I_{i\perp}} = \left| \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} \right|^2 = \frac{\sin^2(i-b)}{\sin^2(i+b)} \\ \frac{I_{r\parallel}}{I_{i\parallel}} = \left| \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} \right|^2 = \frac{\tan^2(i-b)}{\tan^2(i+b)} \end{cases}$$

där $\begin{cases} I_{i\perp} + I_{i\parallel} = I_i \\ I_{r\perp} + I_{r\parallel} = I_r \end{cases}$ **Obs:** $I_{i\perp} = I_{i\parallel}$ för opol. ljus

Specialfall:

A) Infall under Brewstervinkeln (polarisationsvinkeln).

Om i väljes så att $(i+b)$ blir 90° , blir $\tan(i+b) = \infty$ och därmed $E_{r\parallel} = 0$ och $I_{r\parallel} = 0$, d v s det reflekterade ljuset blir helt planpolariserat ($I_r = I_{r\perp}$). Denna speciella infallsvinkel ($i = i_B$) kallas Brewster-vinkeln.

Brytningslagen ger i detta fall:

$$\frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \tan i_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{Brewsters lag})$$

B) Vinkelrätt infall ($i = 0$).

Låt i och b gå mot noll. Då gäller

$$\begin{aligned} \sin(i-b) &\rightarrow (i-b) & \text{och} & & \tan(i-b) &\rightarrow (i-b) \\ \sin(i+b) &\rightarrow (i+b) & \text{och} & & \tan(i+b) &\rightarrow (i+b) \end{aligned}$$

Fresnels formler ger då:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{I_{r\perp}}{I_{i\perp}} = \frac{I_{r\parallel}}{I_{i\parallel}} = \left(\frac{i-b}{i+b} \right)^2 = \left(\frac{\frac{i}{b} - 1}{\frac{i}{b} + 1} \right)^2$$

Brytningslagen vid små vinklar: $\frac{i}{b} = \frac{n_2}{n_1}$

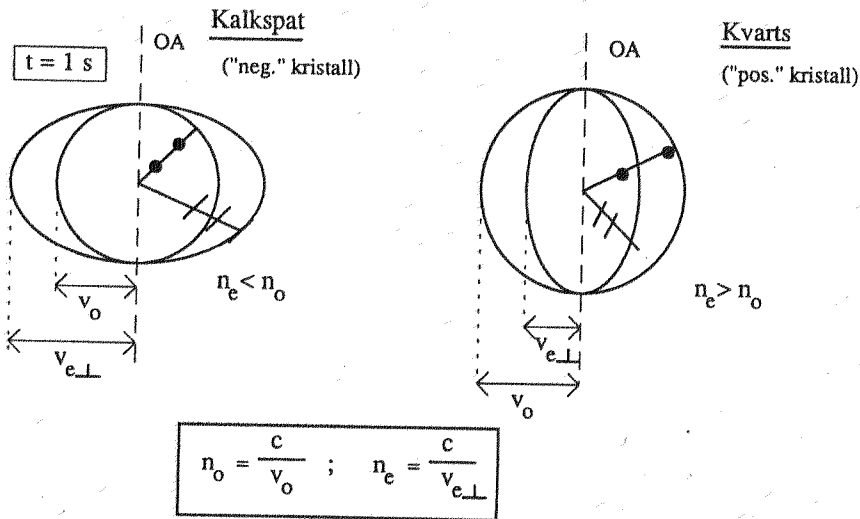
$$\therefore \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{\frac{n_2}{n_1} - 1}{\frac{n_2}{n_1} + 1} \right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

OPTISK ANISOTROPI (DUBBELBRYTNING)

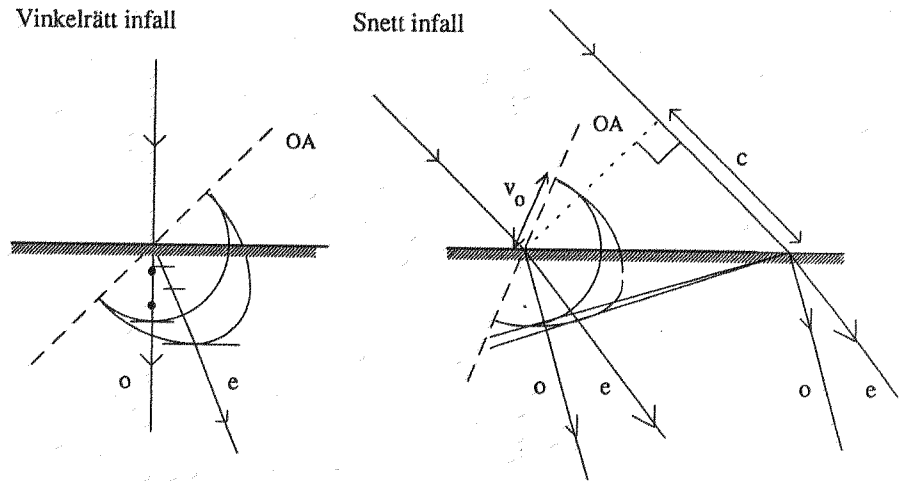
I vissa kristaller har ϵ_r olika värden i olika riktningar. Eftersom en EM-vågs hastighet bestäms av det ϵ_r -värde som gäller i E-vektorns riktning, kommer ljushastigheten (och därmed brytningsindexet) i sådana kristaller att ej vara entydigt bestämd.

I s k enaxiga kristaller (t ex kalkspat och kvarts) finns en huvudsymmetri-axel, kallad optiska axeln (OA). I sådana kristaller har ϵ_r ett värde för E-fält i OA:s riktning och ett annat värde för E-fält i alla riktningar \perp OA.

En punktformig EM-störning i en sådan kristall ger (i det allm. fallet) upphov till två vågor, en ordinär våg med sfärisk vågfront, i vilken ljuset är polariserat \perp OA samt en extra-ordinär våg rotationsellipsoidisk vågfront (se fig), där ljuset är polariserat i ett plan som innehåller OA.



Exempel: Tillämpning av Huygens princip vid ljusbrytning i en kristall ger normalt två brutna strålar.

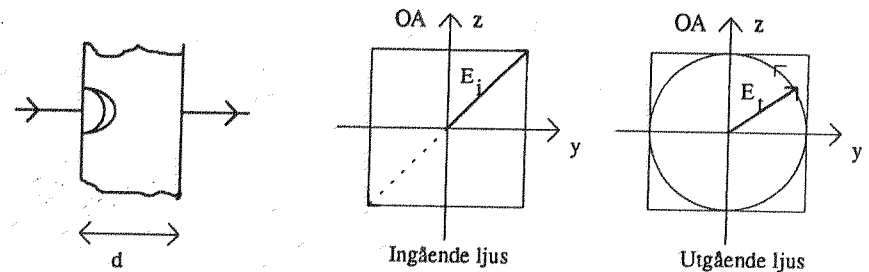


Kvartsvåglängdsplattan ($\lambda/4$ - plattan):

Denna består av ett dubbelbrytande material och är utskuren // OA. Tjockleken (d) är så vald att o-ljuset och e-ljuset hinner fasförskjutas en kvartsvåglängd (ev plus ett antal halva våglängder) under sin gång genom plattan. Fasdifferensen mellan de utgående vågorna blir då till beloppet 90° . Villkoret kan skrivas

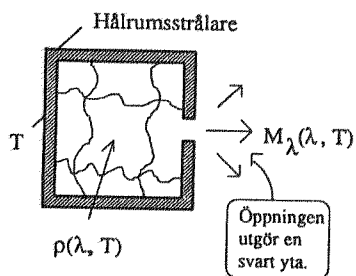
$$d \cdot |n_e - n_o| = \frac{\lambda}{4} + m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{där } m = 0, 1, 2, \dots$$

Om vinkelrätt infallande ljus är planpolariserat och svänger i en riktning som bildar 45° med OA, kommer utgående ljuset att vara cirkulärpolariserat.



SVARTKROPPSSTRÅLNING

Svartkroppsstrålningens frekvensspektrum undersöktes noggrant under 1800-talet. Som strålningskälla användes en s k hålrumsstrålare (en ugn med en liten öppning). Öppningen kan betraktas som en praktiskt taget helt svart yta eftersom infallande strålning (av godtycklig våglängd) till mycket ringa del reflekteras ut genom öppningen. Den svarta ytan utsänder vid given temperatur mer strålning än någon annan yta vid samma temperatur. Experimenten visade även att svartkroppsstrålningen var entydigt bestämd av temperaturen både m a p totalt utstrålad effekt och frekvensspektrum. Vidare fann man att en icke-svart yta som absorberar a % av infallande strålning av viss våglängd också utsänder a % av vad en svart yta skulle utsända vid denna våglängd (Kirchhoffs strålningslag).

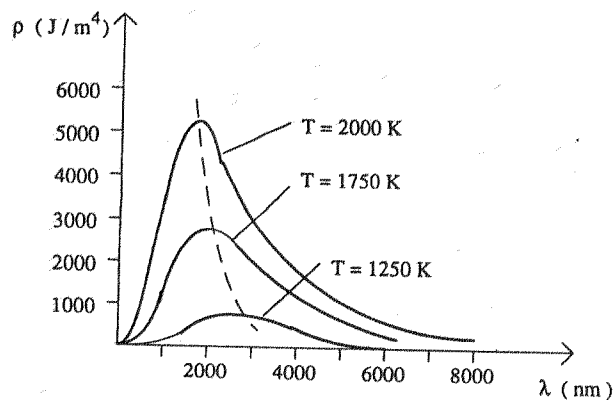


Beteckningar:

$\rho(\lambda, T)$ = hålrummets energitäthet per våglängdsenhet.

$M_\lambda(\lambda, T)$ = utsänd effekt per ytenhet och våglängdsenhet. (den spektrala exitansen)

Mellan M_λ och ρ finns sambandet $M_\lambda = \rho \cdot c/4$ där c = ljushastigheten.



Plancks strålningslag. Planck antog att atomerna i hålrummets väggar fungerade som elektromagnetiska oscillatorer med olika svängningsfrekvenser (ν). För att förklara våglängdsberoendet hos ρ (och M_λ) var han tvungen att anta att oscillatorernas energi (E) endast kunde vara heltalsmultipler av $h\nu$ där h är en konstant.

$$E = n \cdot h\nu \quad \text{där } n = 0, 1, 2, \dots$$

Med hjälp av detta antagande och klassisk termodynamik kunde Planck visa att hålrummets energitäthet för våglängder mellan λ och $\lambda + \Delta\lambda$ kan skrivas

$$dU = \rho \cdot d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \cdot d\lambda \quad (\text{Plancks strålningslag})$$

där c är ljushastigheten och k är Boltzmanns konstant ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K). Planck anpassade sin konstant (h) så att hans teori skulle överensstämja med de experimentella kurvorna på föregående sida. Perfekt anpassning erhöles för $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js (Plancks konstant).

Då $\lambda \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$) övergår P:s lag i Rayleigh-Jeans lag:

$$\rho = 8\pi kT / \lambda^4$$

vilket är det resultat som erhålles om vi släpper kvantiseringvillkoret och enbart tillämpar klassisk fysik. Vid högre frekvenser blir denna formel orimlig ty $\rho \rightarrow \infty$ då $\lambda \rightarrow 0$ (UV-katastrof!).

Följdlagar: Den totalt avgivna strålningseffekten per ytenhet (totala exitansen) fås genom integration av M_λ över alla våglängder:

$$M = \int_0^\infty M_\lambda \cdot d\lambda = \int_0^\infty \frac{c}{4} \cdot \rho \cdot d\lambda \Rightarrow \underline{M = \sigma \cdot T^4} \quad \text{där } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \text{ lag} \quad [\text{Stefan(-)Bolzmans}]$$

Vid vilken våglängd har ρ (och M_λ) max för givet T ?

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = 0 \quad \text{ger} \quad \lambda_{\max} = \frac{hc}{5k} \cdot \frac{1}{T} \quad [\text{Wiens förskjutningslag}]$$

VÄRMEKAPACITET

Enligt klassisk termodynamik har en atom som vibrerar i en riktning medelenergin kT (hälften kinetisk och hälften potentiell energi) vid temperaturen T . Här är $k =$ Boltzmanns konstant. Vibrationsbidraget till den inre energin i ett fast ämne blir då per mol (3 vibrationsriktningar):

$$U_m = 3 N_A kT = 3 RT \quad \begin{cases} R = N_A k = \text{allm. gaskonst.} \\ N_A = \text{Avogadros tal} \end{cases}$$

Molvärmet vid konstant volym blir då enligt klassisk fysik (Dulong-Petit):

$$C_V = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V = 3 R \quad (\text{temp. oberoende!})$$

Detta stämde inte med experiment. Einstein föreslog då en kvantiserad vibrationsenergi ($E = n \cdot hv$ där n är ett heltal v är atomernas vibrationsfrekvens). Vibrationsenergin per mol blir då

$$U_m = \frac{3N_A \cdot hv}{e^{hv/kT} - 1} \quad \text{varur fås}$$

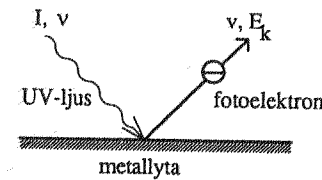
$$C_V = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V = 3R \left(\frac{hv}{kT} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{e^{hv/2kT}}{e^{hv/kT} - 1} \right\}^2$$

Einsteins formel ger i överensstämmelse med experiment att

$$\begin{cases} C_V \rightarrow 3R & \text{då } kT \gg hv \quad (T \rightarrow \infty) \\ C_V \rightarrow 0 & \text{då } T \rightarrow 0 \end{cases}$$

(I övrigt stämmer Einsteins modell endast grovt med experiment. Antagandet att endast en vibrationsfrekvens existerar är en överförenkling.)

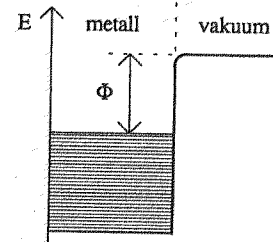
FOTOELEKTRISK EFFEKT



Då en metallyta belyses med tillräckligt kortvågigt ljus kastas elektroner ut från ytan.

Beteckningar:

$I =$ intensitet; $v =$ frekvens
 $v =$ hastighet; $E_k =$ kin. energi
 $\Phi =$ utträdesarbetet (den minsta energi som kan frigöra en elektron)



Experimentella fakta som strider mot EM-vågteorin:

1. För given metall beror E_k enbart av v , inte av I .
2. Under en viss tröskelfrekvens (v_0) fås inga fotoelektroner, hur högt I än är.
3. Fotoelektroner emmitteras omedelbart då ljuset träffar ytan.

Einsteins fotonteori (1905): Ljuset består energimässigt av kvanta (fotoner) med energin hv . En foton kan absorberas av en elektron varvid fotonens hela energi överföres till elektronen. Den maximala kinetiska energin fotoelektronen blir då:

$$(E_k)_{\max} = hv - \Phi = h(v - v_0) \quad (v_0 = \text{tröskelfrekvensen})$$

Fotonens egenskaper:

1. Saknar vilomassa ($m_0 = 0$).
2. Kan endast ha hastigheten c (= ljushastigheten i vakuum).
3. Har rörelsemängden $p = E/c = hv/c = h/\lambda$.

Anm: Sistnämnda egenskap innebär att ljuset utövar ett strålningstryck på en yta som absorberar eller reflekterar ljuset. (Detta kan även visas m h a klassisk vågteori.) Uttrycket $p = E/c$ utgör ett specialfall av den relativistiska formel som gäller för en godtycklig partikels rörelsemängd

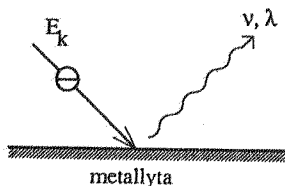
$$p = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{E^2 - (m_0 \cdot c^2)^2}$$

där m_0 är partikelns vilomassa och E dess totala energi.

Samband mellan ljusets våg- och partikelbeskrivning:

Vågens intensitet, t ex i olika punkter av ett interferensmönster är ett mått på sannolikheten för en foton att träffa dessa punkter.

Fotoelektriska effektens omvändning:

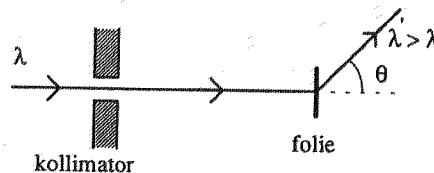


Då snabba elektroner bromsas upp i ett fast material uppstår EM-strålning av kort våglängd (röntgenstrålning). Den utsända strålningens maximala frekvens (eller kortaste våglängd) bestäms av relationen:

$$h \cdot \nu_{\max} = h \cdot \frac{c}{\lambda_{\min}} = E_k$$

Röntgenområdet: $0,01 < \lambda < 10 \text{ nm}$

COMPTON-EFFEKT



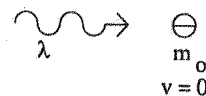
Då monokromatisk röntgenstrålning med våglängden λ sprids mot ett material, t ex en metallfolie, uppvisar den spridda strålningens spektrum två intensitetstoppar, en vid våglängden λ men också en vid en våglängd $\lambda' > \lambda$, där λ' beror på spridningsvinkeln θ .

Compton fann (1923) experimentellt sambandet

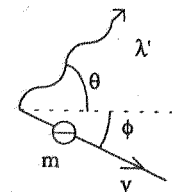
$$\lambda' - \lambda = \text{konst} \cdot (1 - \cos \theta)$$

Comptons teori: Compton förklarade våglängdskomponenten λ' som ett resultat av kollisioner mellan fotoner och löst bundna ("fria") elektroner. Betrakta en sådan stöt:

Före stöten



Efter stöten



Relativistisk massa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Rörelsemängden bevaras:

$$\rightarrow \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + m \cdot v \cdot \cos \phi$$

$$\uparrow 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - m \cdot v \cdot \sin \phi$$

Energin bevaras:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2$$


$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

Konstanten $h/m_0 c$ ($= \lambda_c$) kallas Compton-våglängden.

MATERIEVÅGOR

de Broglies hypotes (1924):

En masspartikel i rörelse (rörelsemängden = p) kan förknippas med en materievåg (ψ) med våglängden

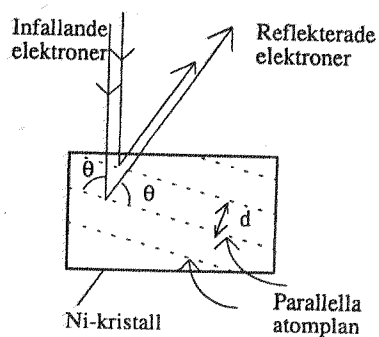
$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{jmf. fotonen})$$

där

$$p = \underbrace{m}_{\substack{\text{relativ} \\ \text{massa}}} \cdot v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v \quad (m_0 = \text{vilomassan})$$

Elektrondiffraction:

de Broglies hypotes bekräftades 1927 för elektroner av Davisson och Germer. De visade att elektroner (med viss rörelsemängd) som sköts mot en nickelkristall företädesvis spreds i riktningar som uppfyller Braggs villkor. Elektronerna undergick alltså diffraction mot Ni-kristallen och uppträdde i detta avseende på exakt samma sätt som man tidigare funnit att röntgenvågor gör.



Konstruktiv interferens fås då

$$2d \sin\theta = m \cdot \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

Senare visades att även andra atomära partiklar (neutroner, protoner m.fl.) uppvisar diffraction och därmed vågegenskaper.

ATOMÄRA SPEKTRA

Då man i slutet av 1800-talet började undersöka ljuset från exciterade fria atomer fann man att varje grundämne hade sitt karakteristiska spektrum - sitt fingeravtryck så att säga. Man fann att spektrallinjerna ofta kunde ordnas i regelbundna serier, s k spektralserier. J. Rydberg (svensk fysiker) fann att våglängderna (λ_m) i en serie kunde fås ur formeln

$$\frac{1}{\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_\infty} - \frac{R}{(m + \mu)^2}$$

där m antar heltalsvärden och där μ är ett tal mellan 0 och 1. λ_∞ och μ är konstanter för en given serie, medan R (Rydberg-konstanten) är en universell konstant.

Vätets spektra:

Enklaste spekrat har väte, där man finner att alla linjer inom det synliga området tillhör en serie vars våglängder satisfierar formeln ovan om $\mu = 0$. Väte har dessutom en serie i UV-området och flera serier i IR-området. Samtliga linjer fås ur formeln

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \text{där} \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots & (\text{serienummer}) \\ m = (n+1), (n+2), \dots & (\text{linjenummer}) \end{cases}$$

De första spektralserierna för väte är:

$n = 1 \rightarrow$ Lymanserien ($m = 2, 3, 4, \dots$), alla linjer i UV-området.

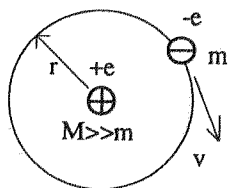
$n = 2 \rightarrow$ Balmer-serien ($m = 3, 4, 5, \dots$), alla linjer i synl. området.

$n = 3 \rightarrow$ Paschen-serien ($m = 4, 5, 6, \dots$), alla linjer i IR-området.

o s v

BOHR-MODELLEN FÖR VÄTE

Bohr antog cirkulär elektronbana för vilken jämvikttekvationen kan skrivas



$$\underbrace{\frac{m v^2}{r}}_{\text{centrifugal kraften}} = \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}}_{\text{Coulomb-kraften}} \quad (1)$$

Bohr postulerade vidare att väte har strålningsfria tillstånd med kvantiserat rörelsemängdsmoment:

$$m \cdot v \cdot r = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad (2) \quad (\text{där } n = 1, 2, 3, \dots \text{ är ett kvanttal})$$

(1) och (2) ger v och r för de strålningsfria tillstånden. Man får:

$$v = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n} = v_n$$

där v_n och r_n är tillåtna hastigheter och radier för elektronen.

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m} \cdot n^2 = r_n$$

De strålningsfria tillståndens totala energi blir då

$$E = E_n = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \dots = -\frac{m \cdot e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Då elektronen övergår från ett högre tillstånd $n = n_i$ till ett lägre tillstånd $n = n_f$, utsändes strålning med frekvensen:

$$v = \frac{E_{n_i} - E_{n_f}}{h} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{E_{n_i} - E_{n_f}}{hc} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{m \cdot e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}}_R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

vilket överensstämmer med Rydbergs empiriska formel!

SCHRÖDINGER-EKVATIONEN

Klassiska harmoniska vågor i komplex form är av typen

$$\vec{s} = \bar{A} \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{där } \bar{A} \text{ är den komplexa amplituden})$$

För en materievåg är enligt de Broglie $\lambda = h/p$ d v s

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar} \quad \text{där } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Enligt Plancks hypotes är vidare:

$$\omega \equiv 2\pi\nu = 2\pi \cdot \frac{E}{h} = \frac{E}{\hbar}$$

En partikel som har rörelsemängden p och totala energin E och som rör sig längs x -axeln borde då kunna beskrivas av en vågfunktion av typen

$$\Psi = \bar{A} \cdot e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)}$$

Vilken typ av vågekvation Ψ är en lösning till, inser vi, om vi deriverar två ggr m a p x och en gång m a p t . Då fås

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \cdot \Psi \quad \text{samtidigt} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i \cdot E}{\hbar} \cdot \Psi$$

där totala energin kan skrivas som

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (\text{kin. + pot. energi})$$

Ur de tre sista ekvationerna fås

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V \cdot \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

vilket är Schrödingers tidsberoende vågekvation i en dimension.

Generalisering: S-ekv. generaliseras lätt till 3 dimensioner genom att vänstra ledet kompletteras med andraderivatorna m a p y och z .

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V \cdot \Psi = i\hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

eller med Laplace-operatorm $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2 + V \right] \Psi = i\hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Separation av tids- och lägesberoendet.

Om potentiella energin ej är tidsberoende blir S-ekv. separabel d v s vi kan ansätta

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot \phi(t)$$

Insättning i S-ekv och division med $\psi \cdot \phi$ ger

$$\frac{1}{\psi} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2 + V \right] \psi = i\hbar \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (= E)$$

Eftersom vänstra ledet (VL) är en funktion av enbart lägeskoordinater och högra ledet (HL) av enbart tiden, måste båda vara lika med en konstant, betecknad E. Den tidsberoende delev. (HL = E) ger lösningen

$$\phi(t) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

där E tydligen är identisk med den totala energin (jmf ansatsen på föregående sida). Den lägesberoende delev. (VL = E) ger

$$\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2 + V \right]}_{\text{Hamilton-op. (=H)}} \psi = E \cdot \psi \quad \text{eller} \quad H\psi = E\psi$$

Egenvärden och egenfunktioner.

Den tidsberoende S-ekv ($H\psi = E\psi$) är en egenvärdesekvation med konstanten E som egenvärde. Som vi skall se har denna ekvation fysikaliskt acceptabla lösningar endast för vissa diskreta E-värden (E_n), som representerar systemets möjliga totala energier. De mot E_n svarande lösningarna skrivs $\psi_n(x, y, z)$. En allmän lösning till S-ekv kan skrivas som en superposition av egenvärdeslösningar.

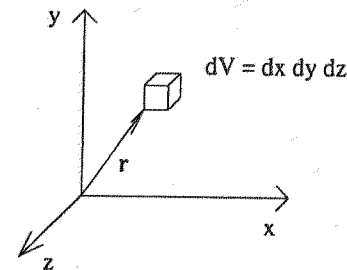
$$\Psi = \sum_n a_n \cdot \psi_n(x, y, z) \cdot e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \quad (\psi_n = \text{egenfunktion})$$

där a_n är konstanter bestämda av de villkor som pålägges systemet.

Vågfunktionens tolkning.

$\Psi(x, y, z, t)$ är en 3-dimensionell komplex vågfunktion utan någon direkt fysikalisk tolkning. Däremot har $\Psi \cdot \Psi^* = |\Psi|^2$ följande tolkning enligt Born:

$|\Psi|^2$ är ett mått på sannolikheten per volymsenhet att finna partikeln i punkten (x, y, z) vid tiden t.



Sannolikheten att finna partikeln i volymselementet dV är vid tiden t proportionell mot

$$\underbrace{|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}_{\text{sannolikhets-tätheten}} \cdot dV$$

Vågfunktionens normering.

Om Ψ är en lösning till S-ekv är uppenbarligen även $N \cdot \Psi$ en lösning om N är en numerisk konstant. Att välja den normerade lösningen innebär att välja ett N sådant att $|N \cdot \Psi|^2$ representerar den sanna sannolikhets-tätheten. Villkoret blir att sannolikheten att finna den aktuella partikeln någonstans i det totala rummet måste bli 1 (full säkerhet). Alltså

$$N^2 \int \Psi^* \cdot \Psi \cdot \overbrace{dx dy dz}^{dV} = 1$$

där integrationen utsträcks över hela rummet. N kallas normeringskonstant.

Välartade lösningar.

Följande krav måste ställas på den tidsberoende vågfunktionen ψ för att den skall vara fysikaliskt acceptabel. (Kraven är en konsekvens av Borns tolkning)

1. ψ måste vara kontinuerlig och ha kontinuerliga förstaderivator.
2. ψ måste vara en entydig funktion.
3. ψ måste ha ett ändligt värde överallt.

Dessa krav innebär att endast vissa energiegenvärden är möjliga, nämligen de som ger välartade (d v s acceptabla) lösningar. Energiskvantisering blir därmed en konsekvens av den vågmekaniska behandlingen och vågfunktionens tolkning.

OPERATORER, OBSERVABLER OCH VÄNTEVÄRDEN

Den tidsberoende S-ekv är exempel på en egenvärdesekvation. Typiskt för en sådan är att den har formen

$$(\text{operator}) (\text{funktion}) = (\text{numerisk faktor}) \cdot (\text{samma funktion})$$

eller med symboler:

$$\hat{\Omega} f = \omega \cdot f$$

där den numeriska faktorn är det s k egenvärdet.

I fallet S-ekv representerar egenvärdet energin, som är en mätbar storhet, en s k observabel. Hamilton-operatorm kallas därför energioperatorm. Även andra observabler t ex rörelsemängd och läge kan knytas till vissa operatorer via egenvärdesekvationer. Rörelsemängden längs x-axeln framkommer sålunda som egenvärden till ekvationen

$$\underbrace{\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}}_{\hat{p}_x = \text{rörelsem.op.}} \Psi = p_x \cdot \Psi$$

Analogt gäller för läget på x-axeln

$$\underbrace{x}_{\hat{x} = \text{lägesop.}} \Psi = x \cdot \Psi$$

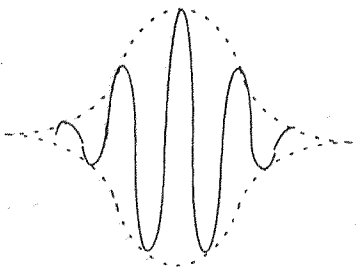
Väntevärdet $\langle \rangle$ för en observabel är medelvärdet av ett stort antal observationer. Allmänt gäller:

$$\langle \Omega \rangle = \int \Psi^* \cdot \hat{\Omega} \Psi \cdot dV$$

där integrationen utsträcks över hela rummet och där ψ förutsättes vara normerad.

HEISENBERGS OSÄKERHETSRELATION

Eftersom vågfunktionen ψ är förknippad med sannolikheten att finna partikeln i olika punkter, är det mindre meningsfullt att associera en partikel med ett oändligt långt vågtåg. Man skulle ju då inte alls veta var någonstans längs vågtåget partikeln befinner sig. Om man däremot kan tilldela partikeln en ändlig lägesosäkerhet är $\psi \neq 0$ endast inom detta begränsade osäkerhetsområde. ψ utgör då en våggrupp (se fig).



Enligt Fourier-analysen kan våggruppen ses som en överlagring av harmoniska vågor (e^{ikx}) med olika k -värden:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) \cdot e^{ikx} dk$$

($c(k)$ = Fourier - transformen till ψ)

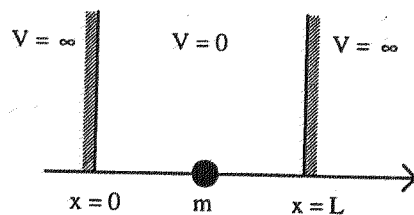
För en våggrupp av ändlig längd (Δx) har bidragens amplitud $c(k)$ avsevärd storlek endast inom ett begränsat intervall (Δk). Ju kortare våggruppen är, desto större vågtalsområde krävs för att beskriva den och vice versa. Relationen mellan Δx och Δk beror på våggruppens form, samt på hur Δx och Δk definieras. Minsta värdet på produkten $\Delta x \cdot \Delta k$ inträffar om våggruppen har formen av en gaussisk klockkurva. Om Δx och Δk definieras som standardavvikelse blir det nämnda minimivärdet $(\Delta x \cdot \Delta k)_{\min} = \frac{1}{2}$. Allmänt gäller då:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{ty } k = \frac{p}{\hbar})$$

Den understrukna relationen kallas "Heisenbergs osäkerhetsrelation" och är uppenbarligen en rent matematisk konsekvens av materiens vågegenskaper.

Relationen innebär fysikaliskt att det i princip är omöjligt att samtidigt bestämma både läge och rörelsemängd hos en partikel med obegränsad noggrannhet.

PARTIKEL I ENDIMENSIONELL POTENTIALLÅDA



Inuti lådan blir den tidsberoende S-ekv

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} = E \cdot \psi$$

eller

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2 \cdot \psi = 0 \quad \text{där } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (\text{jmf. svängn. ekv.})$$

Lösning: $\psi = A \sin kx + B \cos kx$

Randvillkor: Kravet på välartad lösning ger att $\psi = 0$ för $x \leq 0$ och för $x \geq L$. Att ψ försvinner vid lådans väggar utnyttjas nu för att bestämma tillåtna vågfunktioner (egenfunktioner) och tillåtna energier (egenvärden). Vi får:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0; \quad \psi(L) = 0 \Rightarrow A \sin kL = 0$$

Eftersom $A \neq 0$ (partikeln finns någonstans) fås då

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n \cdot \pi \quad \text{där } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Obs: Ej } n = 0)$$

$$\therefore k = n \cdot \frac{\pi}{L} \Rightarrow E = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2 \cdot 2m} = n^2 \cdot \frac{\hbar^2}{8m \cdot L^2} = E_n$$

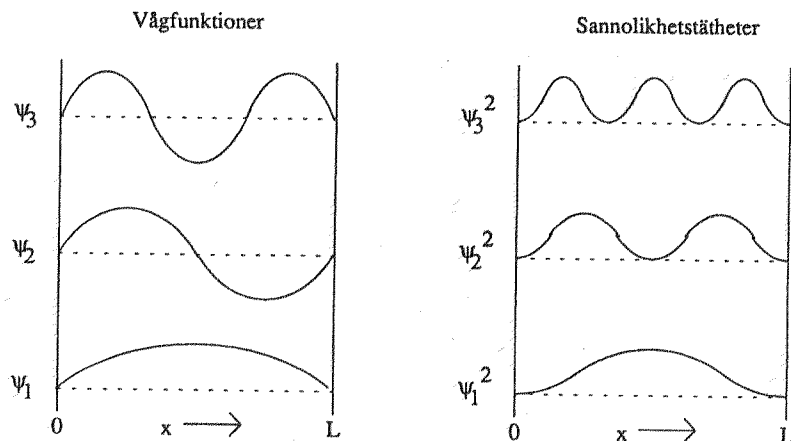
$$\text{Normering: } 1 = \int_0^L |\psi|^2 \cdot dx = A^2 \int_0^L \sin^2 kx \cdot dx = A^2 \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Normerade egenfunktioner:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{n \pi x}{L}$$

svarande mot egenvärdena E_n

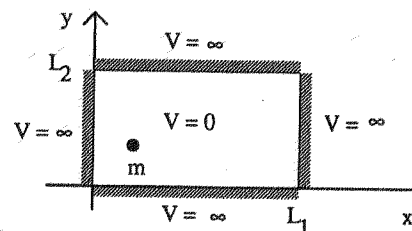
Egenfunktionerna får samma form som stående vågor på en sträng:



Slutsatser: För partikel i låda gäller

1. Energin är kvantiserad.
2. Lägst tillåtna energin (nollpunktsenergin) är > 0 , d v s partikeln kan inte befinna sig i vila.
3. Nollpunktsenergin och avståndet mellan tillåtna energier ökar då lådans längd minskar.
4. Rörelsemängden för partikeln i ett tillstånd (n) är bestämd till beloppet men inte till riktningen. $\left[\sin kx = (e^{ikx} - e^{-ikx}) / 2i \right]$
5. Sannolikheten att finna partikeln i ett litet intervall (Δx) varierar med läget (x) i lådan.
6. Höga kvanttal (n) ger en jämnare sannolikhetsfördelning över lådan än låga. Detta bekräftar korrespondensprincipen, enligt vilken kvantfysiken övergår i klassisk fysik vid höga kvanttal.

PARTIKEL I TVÅDIMENSIONELL LÅDA



S-ekv blir inuti lådan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = E \cdot \psi$$

där $\psi = \psi(x, y)$.

Ekvationen är separabel: Ansätt $\psi(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$

Separation av x- och y-delen ger ekvationerna:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = E^X \cdot X \quad \text{och} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = E^Y \cdot Y$$

där $E^X + E^Y = E$.

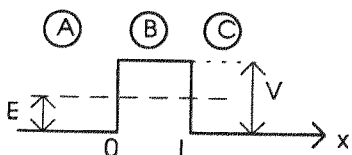
Normerade lösningar:
$$\psi_{n_1 n_2} = \sqrt{\frac{4}{L_1 \cdot L_2}} \cdot \sin \frac{n_1 \cdot \pi x}{L_1} \cdot \sin \frac{n_2 \cdot \pi y}{L_2}$$

Energiegenvärden:
$$E_{n_1 n_2} = \left\{ \left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right\} \cdot \frac{\hbar^2}{8m}$$

Obs:

1. I detta fall fås två kvanttal. Allmänt fås ett kvanttal för varje frihetsgrad.
2. Den kvadratiske symmetrin ($L_1 = L_2$) leder till att $E_{n_1 n_2} = E_{n_2 n_1}$ d v s två olika tillstånd har samma energi. Detta kallas degeneration.

TUNNELEFFEKT



Antag att en partikel infaller från område A (där $V = 0$) med energin E mot en potentiabariär med höjden $V > E$. En viss sannolikhet föreligger då att finna partikeln såväl inuti barriären (område B) som höger om barriären (område C).

Lösningarna till S-ekv $\psi'' = [2m(V - E) / \hbar^2] \cdot \psi$ blir i resp. område:

Område A: $\psi_A = \underbrace{A \cdot e^{ikx}}_{\text{inf. våg}} + \underbrace{A' \cdot e^{-ikx}}_{\text{refl. våg}}$ (oscillerande karaktär)

Område B: $\psi_B = B \cdot e^{\kappa x} + B' \cdot e^{-\kappa x}$ (exponentiell karaktär)

Område C: $\psi_C = C \cdot e^{ikx} + \underbrace{C'}_0 \cdot e^{-ikx}$ (osc; refl. våg saknas)

Randvillkor: $\begin{cases} \psi_A(0) = \psi_B(0); & \psi_B(L) = \psi_C(L) \\ \psi'_A(0) = \psi'_B(0); & \psi'_B(L) = \psi'_C(L) \end{cases}$

Ur dessa villkor kan konstanterna A' , B och B' elimineras, varefter ett samband mellan A och C återstår. Ur detta löser vi ut $P \equiv |C|^2/|A|^2$ som anger sannolikheten för att en infallande partikel penetrerar barriären.

Resultat:

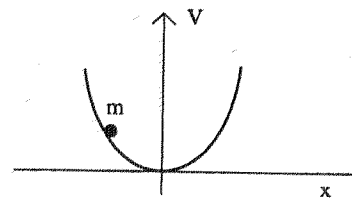
$$P = \frac{1}{1+G} \quad \text{där } G = \frac{(e^{L/D} - e^{-L/D})^2}{16\epsilon(1-\epsilon)} \quad \text{där } D = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V-E)}} \quad \text{och } \epsilon = \frac{E}{V}$$

Om $L/D \gg 1$ (lång och hög barriär) kan $e^{-L/D}$ försummas och $G \gg 1$.

Då fås: $P = \frac{1}{16\epsilon(1-\epsilon)} \cdot e^{-2L/D}$

Obs: P avtar exponentiellt med ökande L och \sqrt{m} .

HARMONISKA OSCILLATORN



Betrakta en partikel som är instängd i en parabelformad potentialgrop:

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

Insättning i S-ekv ger: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 \cdot \psi = E \cdot \psi$ eller

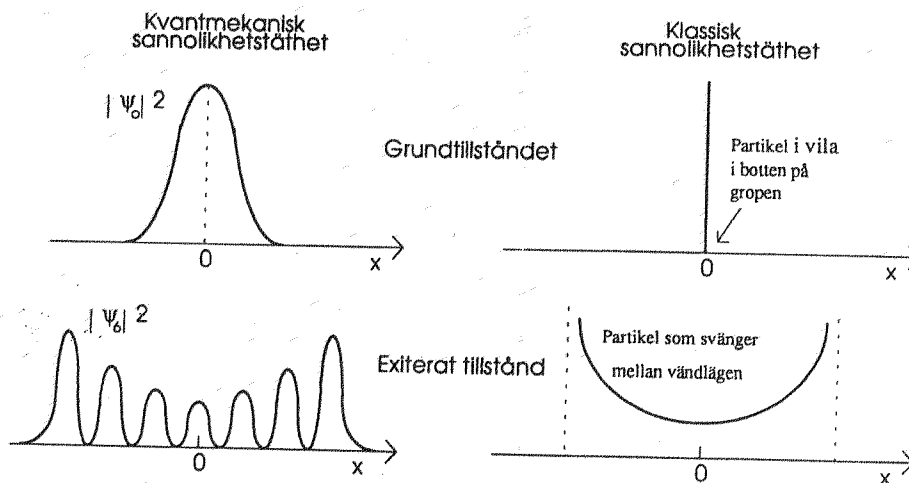
$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + (\epsilon - y^2) \cdot \psi = 0 \quad \text{där } y = \left(\frac{km}{\hbar^2}\right)^{1/4} \cdot x \quad \text{och } \epsilon = \frac{E}{\frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Lösningar: $\psi_v = N_v \cdot H_v(y) \cdot e^{-y^2/2}$ där $v = 0, 1, 2, 3, \dots$

svarande mot energierna: $E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{\frac{k}{m}}$

$H_v(y)$ är hermitiska polynom: $H_0 = 1$; $H_1 = 2y$; $H_{v+1} = 2yH_v - 2vH_{v-1}$

Jämförelse mellan kvantmekanisk och klassisk oscillator:



Egenskaper hos den harmoniska oscillatoren:

1. Energin kan endast anta värdena

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)h\nu \quad (v = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

där ν är oscillatorns frekvens och v är vibrationskvantalet.

2. Enligt klassisk mekanik är lägsta energin hos oscillatoren $E = 0$, d v s partikeln är då i vila i punkten $x = 0$. Kvantmekaniskt är lägsta energin > 0 ($E = h\nu/2$, "nollpunktsenergi"). Vi kan se detta som en konsekvens av Heisenbergs osäkerhetsrelation.

3. Följande väntevärden kan beräknas

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(v + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\hbar^2}{mk}\right)^{1/2}$$

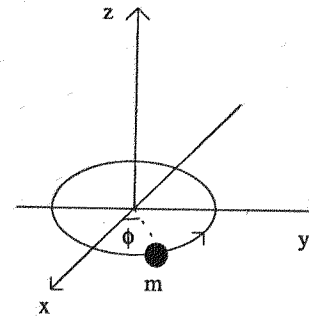
$$\left. \begin{aligned} \langle V \rangle &= E_v / 2 \\ \langle E_{\text{kin}} \rangle &= E_v / 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle V \rangle \quad (\text{jmf klassisk osc.})$$

Den sista formeln är ett specialfall av virialteoremet:

Om potentiella energin för en partikel har formen $V = a \cdot x^b$ gäller följande samband mellan väntevärdena för kinetisk och potentiell energi:

$$2\langle E_{\text{kin}} \rangle = b\langle V \rangle$$

ROTATION I TVÅ DIMENSIONER



Betrakta en partikel som rör sig i nollpotential längs en cirkel i xy-planet med medelpunkten i origo och radien r . S-ekv blir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = E \cdot \psi$$

Övergång till polära koordinater ($x = r \cos \phi$; $y = r \sin \phi$) ger:

$$\frac{d^2 \psi}{d\phi^2} = -\frac{2I \cdot E}{\hbar^2} \cdot \psi \quad \text{där } I = m \cdot r^2 \quad (= \text{tröghetsmomentet})$$

$$\text{Normerad allmän lösning: } \psi_{m_l} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot e^{i \cdot m_l \cdot \phi} \quad \text{där } m_l = \pm \sqrt{\frac{2I \cdot E}{\hbar^2}}$$

Tillämpning av det cykliska randvillkoret $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$ kräver att endast $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ är möjliga. Detta medför att energin och rörelsemängdsmomentet kvantiseras:

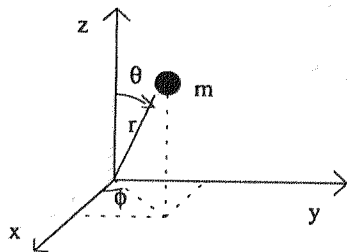
$$\text{Tillåtna energier: } E_{m_l} = \frac{m_l^2 \cdot \hbar^2}{2I}$$

$$\text{Tillåtna rörelsemängdsmoment: } J_z = m_l \cdot \hbar$$

Obs 1: Sista sambandet bekräftas av att ψ_{m_l} är egenfunktion till rörelsemängdsoperatoren $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}$. (Visa !)

Obs 2: Sannolikhetstätheten utefter partikelbanan blir $\psi_{m_l}^* \cdot \psi_{m_l} = \frac{1}{2\pi}$, d v s oberoende av ϕ ! \Rightarrow Läget i banan är helt obestämt.

ROTATION I TRE DIMENSIONER



Betrakta en partikel som rör sig på ytan av en sfär med radien r . S-ekv i polära koordinater blir i detta fall (med $V = 0$):

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -\frac{2IE}{\hbar^2} \cdot \psi$$

där $I = m \cdot r^2$ är tröghetsmomentet.

S-ekv kan separeras i en ϕ -del och en θ -del, varför lösningarna kan skrivas under formen:

$$\psi(\theta, \phi) = \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi)$$

De cykliska randvillkoren (2 st i detta fall) ger två kvanttal (m_l och l).

Acceptabla $\Phi(\phi)$ kräver som tidigare $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Acceptabla $\Theta(\theta)$ kräver att två villkor uppfylls:

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{samnt} \quad |m_l| \leq l$$

Totalt fås då för tillåtna lösningar $\psi_{l, m_l}(\theta, \phi)$ följande krav:

$$\begin{cases} l = 0, 1, 2, \dots \\ m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \end{cases} \quad [(2l + 1) \text{ olika värden}]$$

Normerade lösningar kallas klotytefunktioner och betecknas $Y_{l, m_l}(\theta, \phi)$.

$$\text{Tillåtna energier:} \quad E = l(l + 1) \cdot \frac{\hbar^2}{2I} \quad (\text{Obs: Oberoende av } m_l)$$

Rörelsemängdsmoment och rymdkvantisering.

Kvantiseringen av energin (E) innebär att även rörelsemängdsmomentets belopp (J) är kvantiserat. Enligt mekaniken är

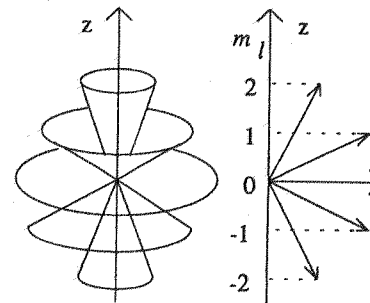
$$E = J^2 / 2I \Rightarrow J = \sqrt{2I \cdot E}$$

Insättning av uttrycket för E (enl. föreg. sida) ger då

$$J = \sqrt{l(l + 1)} \cdot \hbar \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

Men enligt ovan gäller även: $J_z = m_l \cdot \hbar \quad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$

Slutsatsen blir att J -vektorn endast kan bilda vissa vinklar med en specificerad riktning (z -riktningen). Detta kallas rymdkvantisering. (Bekräftat experimentellt genom Stern-Gerlachs försök 1921.)



Vektormodellen: I atomfysiken representerar de olika riktningarna hos elektronernas J -vektorer olika elektronstillstånd. De kvantiseringsvillkor som vi här diskuterat förklarar sålunda varför ett givet elektronskal innehåller ett specifikt antal tillstånd och ger därmed nyckeln till det periodiska systemet. Observera att Heisenbergs osäkerhetsrelation förhindrar att mer

än en komponent av J -vektorn specificeras. De olika m_l -tillstånden svarar alltså mot att J -vektorn befinner sig inom koniska ytor (se fig).

Spinn: I atomfysiken kompliceras vektormodellen av att elektronen förutom rörelsemängdsmomentet i sin bana runt kärnan också har ett eget inneboende rörelsemängdsmoment - ett spinn ("rotation kring egen axel"). I analogi med banrörelsens kvanttal (l och m_l) kan spinnets kvantisering beskrivas med kvanttalen s och m_s . Medan l kan (som vi har sett) ha flera heltalsvärden kan s endast ha ett värde ($s = 1/2$), vilket betyder att m_s kan anta två ($= 2s + 1$) värden, nämligen $m_s = \pm 1/2$.