Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521 och FFM520
Onsdagen 15 april 2015, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall

1. Av symmetriskäl är huvudtröghetsaxlarna genom masscentrum parallella med rätblockets sidor. Med avseende på den axel som är parallell med sidan med längden a ser kroppen ut som en rektangel med sidorna b och c och täthet ρa. Motsvarande huvudtröghetsmoment blir

$$\int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz\, \rho a(y^2+z^2) = \frac{1}{12}\rho abc(b^2+c^2)\,.$$

De övriga fås genom permutation.

2. Lutningsvinkeln α fås genom $\tan\alpha = \frac{v^2/R}{g}$. I exemplet är detta ungefär 1, så lutningen blir c:a 45°. (Det verkar som att krökningsradien redan är i minsta laget för denna hastighet.) Coriolisaccelerationen vid en relativ horisontell hastighet u är $2\omega u \approx 1$ m/s^2, en tiondel av tyngdaccelerationen. Kanske i högsta laget.

   Antag att hastigheten skalas upp med en faktor a och radien med en faktor b. Coriolisaccelerationen skalas då som a/b, medan $\tan\alpha$ går som a^2/b. Om man accepterar högre lutningsvinklar kan man (m.a.p. Corioliseffekter) låta krökningsradien öka med samma faktor som tågets fart.

3. Man kan sätta upp pendelns rörelseekvationer antingen i ett inertialsystem, där

$$\begin{cases} x &= a\sin\omega_0 t + \ell\sin\theta\,, \\ y &= -\ell\cos\theta\,, \end{cases}$$

   eller i ett system med origo i den accelerade upphängningspunkten, och då inkludera en fiktiv kraft (det senare alternativet kan bli litet effektivare). Om man väljer det förra har man

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -a\omega_0^2\sin\omega_0 t + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\,, \\ \ddot{y} &= \ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\,. \end{cases}$$

   Insättning i $m\ddot{x} = -S\sin\theta$, $m\ddot{y} = S\cos\theta - mg$, och eliminering av snörkraften S ger ekvationen för θ:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = \frac{a\omega_0^2}{\ell}\sin\omega_0 t\cos\theta\,,$$

   som för småvinklar approximeras av

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = \frac{a\omega_0^2}{\ell}\sin\omega_0 t\,.$$

   Denna differentialekvation har den allmänna lösningen

$$\theta(t) = \frac{a\omega_0^2}{\ell(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\omega_0 t + A\cos\omega t + B\sin\omega t\,,$$

   där $\omega = \frac{g}{\ell}$. Notera att partikulärlösningens amplitud är större ju närmare egenfrekvensen ω_0 ligger. Insättning av begynnelsevillkoren ger

$$A = 0\,,$$
$$B = -\frac{a\omega_0^3}{\ell\omega(\omega^2-\omega_0^2)}\,.$$

Lämplig rimlighetskontroll: dimension; mycket stora och mycket små ω_0,... Om $\omega_0 = \omega$ fås istället en partikulärlösning $-\frac{a\omega}{2\ell}t\cos\omega t$. Den kan förstås bara använcas för små tider.

4. Låt plankans längd vara ℓ och dess massa m. Plankans mittpunkt rör sig på en cirkel med radie $\frac{\ell}{2}$ med farten $\frac{\ell}{2}\dot{\theta}$, där θ är vinkeln mot väggen. Dess rörelseenergi är då

$$T = \frac{1}{2}m(\frac{\ell}{2}\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2\,.$$

Dess potentiella energi (relativt den vid $\theta = 0$) är $V = \frac{1}{2}mg\ell(\cos\theta - 1)$. Energiprincipen, $T + V = 0$, ger farten vid vinkeln θ,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell}(1 - \cos\theta)\,.$$

För att besvara den andra frågan behöver man betrakta krafter, och ta reda på när den horisontella kraften från väggen skulle behöva bli "negativ" (en dragkraft) för att rörelsen skall försiggå som antaget. Masscentrum har en centripetalacceleration med beloppet $\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2}(1 - \cos\theta)$, och en tangentiell acceleration $\frac{\ell}{2}\ddot{\theta} = \frac{3g}{4}\sin\theta$. Den horisontella delen av accelerationen blir

$$-\frac{3g}{2}(1 - \cos\theta)\sin\theta + \frac{3g}{4}\sin\theta\cos\theta = \frac{3g}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2)\,.$$

Plankan tappar kontakten med väggen då $\cos\theta = \frac{2}{3}$, dvs. $\theta \approx 48°$.

5. Vi börjar med att bestämma rotationsvektorn. Precessionen Ω är given, vi tar den riktad uppåt i figuren. Rullvillkoret ger att den momentana rotationsaxeln går längs planet. Spinnet ν är riktat längs kroppens symmetriaxel, nedåt åt höger i figuren i tesen, och är så stor att dess vertikala komponent är Ω (nedåt). Det kan vara praktiskt att införa en vinkel α, som är vinkeln mellan kroppens symmetriaxel och planet. Då är $\tan\alpha = r/\ell$, och man har $\nu\sin\alpha = \Omega$.

Sedan behöver man ta fram tröghetsmatrisen, för att kunna bilda rörelsemängdsmomentet. Tröghetsmomentet m.a.p. O runt symmetriaxeln är $I_\zeta = \frac{1}{2}mr^2$ och runt vinkelräta axlar $I_\perp = \frac{1}{4}mr^2 + m\ell^2$. Precessionsvektorn behöver delas upp i huvudtröghetsriktningar innan delarna multipliceras med resp. tröghetsmoment. Med ζ-axeln riktad längs spinnvektorn får man då

$$L_\zeta = I_\zeta(\nu - \Omega\sin\alpha) = I_\zeta\Omega(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha)\,.$$

Den andra delen av Ω ger upphov till L_ξ, där ξ-axeln är vinkelrät mot ζ-axeln och pekar snett uppåt till höger,

$$L_\xi = I_\perp\Omega\cos\alpha\,.$$

Den horisontella komponenten av $\vec{L}$ transporteras av Ω. Med $\hat{\eta}$ ut ur pappret:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = -\hat{\eta}\Omega(L_\zeta\cos\alpha + L_\xi\sin\alpha)\,.$$

Detta skall åstadkommas av de vridande momenten runt O. Tyngdkraften bidrager med $mg\ell\cos\alpha\hat{\eta}$ och kontaktkraften F i planet med $-\frac{F\ell}{\cos\alpha}\hat{\eta}$. Samlar vi ihop detta får vi ekvationen

$$\frac{F\ell}{\cos\alpha} - mg\ell\cos\alpha = I_\zeta\Omega^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (I_\xi - I_\zeta)\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Här kan man förstås sätta in tröghetsmomenten och de trigonometriska funktionerna, men det blir inte speciellt mycket mer upplysande.

Den vertikala kraften i O skall balansera övriga, och är alltså $mg - F$. Den horisontella kraften i O skall åstadkomma masscentrums centripetalacceleration, och är $m\ell\Omega^2 \cos\alpha$.

6. Inför några relevanta storheter: Kilens massa: M, klotets massa: m, klotets radie: r, kilens lutningsvinkel: α. Det finns två frihetsgrader, som kan parametriseras med x, en horisontell koordinat för kilen, och θ, en rotationsvinkel för klotet. Välj x positiv åt det håll där kilen är högre, och θ positiv då klotet rullar uppför.

   Nu kan vi skriva ned kinetiska och potentiella energier. Det enda som kräver eftertanke är klotets translationshastighet, som har en vertikal komponent $r\dot\theta\sin\alpha$ och en horisontell komponent $\dot x + r\dot\theta\cos\alpha$. Lagrangefunktionen blir

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}m\left[(r\dot\theta\sin\alpha)^2 + (\dot x + r\dot\theta\cos\alpha)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\dot\theta^2 - mgr\theta\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot x^2 + mr\cos\alpha\dot x\dot\theta + \frac{7}{10}mr^2\dot\theta^2 - mgr\sin\alpha\theta\,. \end{aligned}$$

   Lagranges ekvationer är

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = (M+m)\ddot x + mr\cos\alpha\ddot\theta\,, \\ 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = mr\cos\alpha\ddot x + \frac{7}{5}mr^2\ddot\theta + mgr\sin\alpha\,. \end{aligned}$$

   Härur kan man lösa för $\ddot\theta$ och $\ddot x$:

$$\begin{aligned} \ddot\theta &= -\frac{5g\sin\alpha}{7r}\frac{1}{1 - \frac{5}{7}\frac{m}{M+m}\cos^2\alpha}\,, \\ \ddot x &= \frac{5g\sin\alpha\cos\alpha}{7}\frac{m}{M+m}\frac{1}{1 - \frac{5}{7}\frac{m}{M+m}\cos^2\alpha}\,. \end{aligned}$$

   Tecknen verkar bra: klotet accelererar nedåt och trycker kilen åt sidan. Uttrycket i nämnaren kan inte bli noll. Förutom dimensionskontroll kan man kolla några extremfall. Om $\alpha = 0$ händer ingenting, som väntat. Om $M >> m$ blir $\ddot x = 0$, och $\ddot\theta$ stämmer med ett klot som rullar nedför ett plan. Om $\alpha = \frac{\pi}{2}$ fås inte fritt fall, utan rullning längs en lodrät vägg, och $\ddot x = 0$.