Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Fredagen 5 juni 2015
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Låt koordinaten längs tråden vara ξ, och använd $\hat{\eta}$ fär den horisontella riktning som är vinkelrät mot $\hat{\xi}$. Den vertikala riktningen är $\zeta = z$. Ortvektorn fär pärlan är $\vec{r} = \xi\hat{\xi}$. Man kan antingen derivera detta två gånger, under användande av $\dot{\hat{\xi}} = \omega\hat{z} \times \hat{\xi} = \omega\hat{\eta}$, eller så använder man de färdiga uttrycken för centripetalacceleration/centrifugalkraft och Coriolisacc./Corioliskraft. I vilket fall fås ekvationerna för rörelsen i ξ- resp. η-led:
$$m(\ddot{\xi} - \omega^2\xi) = 0\,,$$
$$2m\omega\dot{\xi} = N\,,$$
där N är normalkraften från tråden (i η-led). Den allmänna lösningen är $\xi(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. Insättning av begynnelsevärdena bestämmer $A = -B = \frac{u}{2\omega}$, så att
$$\xi(t) = \frac{u}{\omega}\sinh\omega t\,.$$
(Kontroll: för små tider, alternativt liten rotationshastighet, dvs. $\omega t \ll 1$, blir $\xi(t) \approx ut$.) Normalkraften blir då
$$N = 2m\omega u\cosh\omega t = 2m\omega u\sqrt{1 + \left(\frac{\omega\xi}{u}\right)^2}\,.$$
(För stora tider ($\omega t \gg 1$) är den exponentiellt avtagande delen av cosh och sinh liten, och $N \approx 2m\omega^2\xi$, oberoende av begynnelsevillkoren.)

2. Stöten tar mycket kort tid, så impuls och impulsmoment från kontaktkrafter från bordet kan försummas. Om en horisontell kraft F verkar på höjden h, fås ekvationerna för masscentrums acceleration a och vinkelaccelerationen:
$$ma = F\,,$$
$$\frac{2}{5}mr^2\alpha = (h - r)F\,.$$
Elimination av F ger $\frac{2}{5}r^2\alpha = (h - r)a$. Om rullning hela tiden skall ske, måste a och α relateras enligt $a = r\alpha$. Detta uppfylls om $h = \frac{7}{5}r$. (Skulle kraften istället vara riktad radiellt, är dess vridande moment kring masscentrum noll. Å andra sidan kan kontaktkrafterna inte längre försummas, så hela resonemanget blir mer komplicerat, och kan bero på friktionskoefficienten.)

3. Beteckna plankans läge med x, masscentrums förflyttning från punkten mittemellan rullarna. Låt normalkrafterna från rullarna vara N_1 och N_2 Jämvikt i vertikalled och momentjämvikt ger
$$N_1 + N_2 = mg\,,$$
$$N_1(d + x) - N_2(d - x) = 0\,,$$
vilket ger
$$N_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{d}\right)mg\,,$$
$$N_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{d}\right)mg\,.$$

Hade det inte varit för den horisontella vibrationen hade rörelseekvationen för plankans rörelse i x-led blivit

$$m\ddot{x} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{d}\right)\mu mg - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{d}\right)\mu mg = -\frac{\mu mg}{d}x\,.$$

Lösningarna är harmonisk svängningsrörelse med vinkelfrekvens $\omega_n = \sqrt{\frac{\mu g}{d}}$. Om nu systemet dessutom utsätts för vibrationen med vinkelfrekvens ω, kan den introduceras som en tröghetskraft. Resonans uppstår då $\omega = \omega_n$.

4. Cykelns hjul kommer att ha rörelsemängdsmoment som är riktade åt vänster. Låt säga att man svänger åt vänster. Då kommer dessa rörelsemängdsmoment att ändras; deras tidsderivata är riktad bakåt. Detta måste åstadkommas av ett vridmoment. Kombinationen tyngdkraft och normalkraft ger ett moment med rätt riktning om man lutar åt vänster, alltså inåt i kurvan (för högersväng gäller motsvarande argument med omkastade riktningar). Effekten av hjulens rotation samverkar alltså med effekten av centrifugalkraften, i meningen att man behöver luta mer.

   En mycket grov uppskattning: Man cyklar med fart v i en kurva med radie R. Massan av cykel och cyklist är M Låt hjulens massa vara m och deras radie r. Då är deras rörelsemängdmoment ungefär $mr^2 \cdot \frac{v}{r} = mrv$. De förändras med vinkelhastigheten $\frac{v}{R}$, så storleken av deras tidsderivata är ungefär $\frac{mrv^2}{R}$. Det vridande momentet från kombinationen av centrifugalkraften och den motriktade kraften från marken är ungefär $\frac{Mv^2}{R}h$, där h är masscentrums höjd. Dessa två moment kan jämföras med varandra, och deras kvot (som blir ett mått på hur stor effekten av hjulens vridning är relativt den av centrifugalkraften) blir $\frac{mrv^2}{R}(\frac{Mv^2}{R}h)^{-1} = \frac{m}{M}\frac{r}{h}$. Normalt sett är hjulens massa en ganska liten del av den totala massan, dessutom är masscentrum högre beläget än hjulradien, så den “extra” effekten i uppgiften är ganska liten.

   Skall man vara mer noggrann får man ta hänsyn till att rörelsemängdsmomenten inte pekar horisontellt när cykeln lutar, etc.

5. Använd sfäriska koordinater θ, φ. Hastigheten fär partikeln är $\vec{v} = a(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi})$. Lagrangianen blir

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(\theta)\,,$$

   och Lagranges ekvationer ger

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(ma^2\dot{\theta}) - ma^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{d\theta}\,, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(ma^2\sin^2\theta\dot{\varphi})\,. \end{aligned}$$

   Den senare ekvationen uttrycker bevarandet av rörelsemängdsmomentet m.a.p. z-axeln. Låt denna rörelsekonstant betecknas $\ell = ma^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$. Då kan $\dot{\varphi}$ lösas ur denna ekvation och stoppas in i ekvationen för θ, som blir

$$0 = ma^2\ddot{\theta} - \frac{\ell^2}{ma^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{dV}{d\theta}\,.$$

   Den givna rörelsen, $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(t) = \Omega t$, är uppenbarligen en lösning, med $\ell = ma^2\Omega$. Små ändringar $\theta = \frac{\pi}{2} + \epsilon$ hanteras m.h.a. $\sin(\frac{\pi}{2} + \epsilon) \approx 1$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon) \approx -\epsilon$. Den lineariserade ekvationen för $\epsilon(t)$ är $\ddot{\epsilon} + (\frac{\ell}{ma^2})^2\epsilon = 0$, dvs. $\ddot{\epsilon} + \Omega^2\epsilon = 0$. Lösningarna är harmonisk rörelse med vinkelfrekvens Ω. Det är naturligt/nödvändigt/självklart att detta måste vara den rätta vinkelfrekvensen — i frånvaro av en potential rör sig partikeln på en storcirkel som avviker litet från ekvatorn. Hade inte vinkelfrekvensen matchat den i φ-rörelsen, hade det inte blivit en storcirkel.

6. Eftersom både kontaktpunkten och masscentrum är i momentan vila, roterar myntet momentant runt en axel som utgör myntets diameter genom dessa punkter. Rotationsvektorn är $\vec{\omega} = \Omega \sin\alpha\hat{\xi}$, där ξ-riktningen är längs diametern (snett uppåt åt höger i figuren). Denna riktning är en huvudtröghetsaxel för myntet, med tröghetsmoment $\frac{1}{4}mr^2$. Rörelsemängdsmomentet pekar alltså åt samma håll, och är $\vec{L} = \frac{1}{4}mr^2\Omega \sin\alpha\hat{\xi}$. Dess tidsderivata är

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \frac{1}{4}mr^2\Omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\hat{\eta} \, ,$$

där $\hat{\eta}$ pekar in i pappret i figuren. Detta skall åstadkommas av det vridande momentet (runt masscentrum) av normalkraften från bordet, som p.g.a. jämvikt i vertikalled har beloppet mg. Momentekvationen ger

$$\frac{1}{4}mr^2\Omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\hat{\eta} = mgr\cos\alpha\hat{\eta} \, .$$

Detta ger den sökta relationen

$$\Omega^2 = \frac{4g}{r\sin\alpha} \, .$$

Med $r \approx 25$ mm och $\alpha = \frac{\pi}{6}$ fås numeriskt $\Omega \approx 56\ \mathrm{s}^{-1} \approx 8.9$ varv/s.