Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Torsdagen 25 augusti 2016
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Börja med att beräkna en kubs tröghetsmatris m.a.p. dess masscentrum, och med koordinataxlar parallella med de givna koordinataxlarna. Den blir

$$\bar{\mathbf{I}}^{(cube)} = \frac{1}{6}ma^2\mathbb{1}$$

De tre huvudtröghetsmomenten är lika, och kubens tröghetsmatris m.a.p. masscentrum är densamma i alla koordinatsystem. Effektivt, ur tröghetssynpunkt, är kuben en sfär. Det betyder att den sammansatta kroppen effektivt har en rotationssymmetri runt linjen genom de två kubernas mittpunkter, som befinner sig på $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \pm\frac{a}{2}(1,1,1)$. Riktningen $\hat{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ är en huvudtröghetsaxel, och likaså är godtyckliga axlar genom origo som är vinkelräta mot den. Kubernas masscentra befinner sig på $(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\zeta}) = \pm\frac{a\sqrt{3}}{2}(0,0,1)$. Tröghetsmomentet m.a.p. ζ-axeln är $I_\zeta = \frac{1}{3}ma^2$. För övriga axlar ger Steiners sats att

$$I_\xi = I_\eta = 2\left(\frac{1}{6}ma^2 + m\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{11}{6}ma^2\,.$$

2. Enligt uppgiften styrs systemet av ekvationerna (index 1 och 2 betecknar de två partiklarna, $\ell = x_2 - x_1$)

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - \ell_0) + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,,\\ m_2\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - \ell_0) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,. \end{aligned}$$

Naturligtvis gäller $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$, vilket uttrycker rörelsemängdskonservering. Vi är bara intresserade av svängningarna, och kan låta masscentrum ligga stilla i origo, dvs. $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$. Eliminering av den ena korrdinaten ger

$$\ddot{x}_2 + \frac{b}{\mu}\dot{x}_2 + \frac{k}{\mu}x_2 = \frac{k\ell_0}{m_2}\,,$$

där μ är den reducerade massan, $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. Kritisk dämning råder då den karaktäristiska ekvationen,

$$\lambda^2 + \frac{b}{\mu}\lambda + \frac{k}{\mu} = 0\,,$$

har en dubbelrot, dvs. då $b^2 - 4\mu k = 0$.

3. För att centrifugalkraften skall ge "gravitationsaccelerationen" g krävs en rotationshastighet ω sådan att $R\omega^2 = g$. Coriolisaccelerationen vid rörelse med den relativa farten v är till beloppet som störst $2\omega v$. Om man kräver att den skall vara högst αg fås alltså relationen $2v\sqrt{\frac{g}{R}} < \alpha g$, dvs.

$$R > \frac{4v^2}{\alpha^2 g}\,.$$

Insättning av de numeriska värdena ger

$$R > \frac{4 \times 25}{0.01 \times 10} \text{ m} = 1 \text{ km}\,.$$

4. Snurrans tröghetsmatris i ett system där ζ-axeln ligger längs snurrans axel är

$$\mathbf{I}_O = \text{diag}(\frac{1}{4}mr^2 + mR^2, \frac{1}{4}mr^2 + mR^2, \frac{1}{2}mr^2)\,.$$

Rotationsvektorn är $\vec{\omega} = \Omega \sin\theta \hat{\xi} + (\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}$, där Ω är precession och ν spinn. Därför är

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_O \vec{\omega} = (\frac{1}{4}mr^2 + mR^2)\Omega \sin\theta \hat{\xi} + \frac{1}{2}mr^2(\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}\,.$$

Det enda tidsberoendet ligger i basvektorerna, som tidsutvecklas enligt

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\xi} = \Omega\cos\theta \hat{\eta}\,,\\ \dot{\hat{\zeta}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\zeta} = -\Omega \sin\theta \hat{\eta}\,.\end{aligned}$$

Insättning av detta i $\dot{\vec{L}}_O$ och användande av $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O = -mgR\sin\theta\hat{\eta}$ leder till relationen

$$\nu + 2\left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{1}{4}\right)\Omega\cos\theta = \frac{2gR}{r^2\Omega}\,.$$

(En liten kontroll fås genom att observera att den andra termen, som kommer från tidsberoendet av den del av $\vec{L}$ som härrör från precessionen, försvinner precis då $\frac{R}{r} = \frac{1}{2}$, dvs. då tröghetsmatrisen är $\frac{1}{2}mr^2\text{diag}(1, 1, 1)$.)

5. Partikeln har en hastighet $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s}$. Lagrangefunktionen blir

$$L = \frac{1}{2}m\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2 \dot{s}^2 - V(\vec{r}(s))\,.$$

Lagranges ekvationer säger då

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{s}} - \frac{dL}{ds}\\ &= \frac{d}{dt}\left(m\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2 \dot{s}\right) - \frac{1}{2}m\frac{d}{ds}\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2 \dot{s}^2 + \frac{d}{ds}V(\vec{r}(s))\\ &= m\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2 \ddot{s} + m\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\dot{s}^2 + \nabla V \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\,.\end{aligned}$$

Om man väljer s som båglängden är $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ och $\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0$. Rörelseekvationen förenklas till

$$m\ddot{s} = -\nabla V \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\,.$$

Accelerationen i kurvans tangentriktning är lika med kraftens komponent i denna riktning.

6. Se kompendiet.