Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Måndagen 16 augusti 2021
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

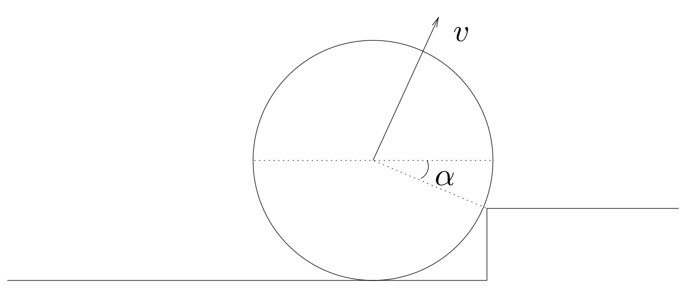
1. Enligt Galileitransformationen ges koordinaterna $\vec{r}'$ i ett inertialsystem $\mathbf{S}'$ av $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$, där $\vec{u}$ är hastigheten för $\mathbf{S}'$ i $\mathbf{S}$. Derivation ger relationen mellan hastigheter: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$. Låt $\hat{x}$ vara riktad "framåt" och $\hat{y}$ uppåt.

   a. Regnet har hastigheten $\vec{v} = (6\hat{x} - 8\hat{y})$ m/s. Med $\vec{u} = 14\hat{x}$ m/s fås regnets hastighet i buss-systemet som $\vec{v}_{\mathbf{B}} = (-8\hat{x} - 8\hat{y})$ m/s, som bildar vinkeln $\frac{3\pi}{4}$ med $\hat{x}$.

   b. Vid en given tid t är (med beteckningar ovan) $\hat{x}' = \hat{x}$, $\hat{y}' = \hat{y}$. Vinkeln är $\frac{\pi}{2}$.

2. Inför en koordinat ξ längs skåran. Corioliskraften verkar vinkelrätt mot $\hat{\xi}$, och påverkar inte rörelsen. Centrifugalkraften är $\vec{F}_c = m\xi\omega^2\hat{\xi}$. Rörelseekvationen blir $m\ddot{\xi} = m\omega^2\xi$. Lösningen som uppfyller begynnelsevillkoren är
$$\xi(t) = \frac{v_0}{\omega}\sinh\omega t\ .$$
   Det finns endast en (inte fiktiv) kraft som påverkar kulan, normalkraften från spåret (som åstadkommer Coriolisaccelerationen). Coriolisaccelerationen är riktad åt vänster under rörelsen, i positiv vinkelled, så effekten $P = \vec{N}\cdot\vec{v} = \vec{N}\cdot\xi\omega\hat{\theta}$ är positiv. (Konkret: $N = 2m\omega\dot{\xi} = 2m\omega v_0\cosh\omega t$. Dess effekt är $P = N\omega\xi = 2m\omega v_0^2\sinh\omega t\cosh\omega t$. Integration från 0 till t ger arbetet $W(t) = \int_0^t P(t')dt' = mv_0^2\sinh^2\omega t$. Jämför med skillnaden i kinetisk energi T. Vid tiden t är den
$$T(t) = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + (\omega\xi)^2) = \frac{1}{2}mv_0^2(\cosh^2\omega t + \sinh^2\omega t) = \frac{1}{2}mv_0^2(1 + 2\sinh^2\omega t)\ ,$$
   och det stämmer att $T(t) - T(0) = W(t)$.

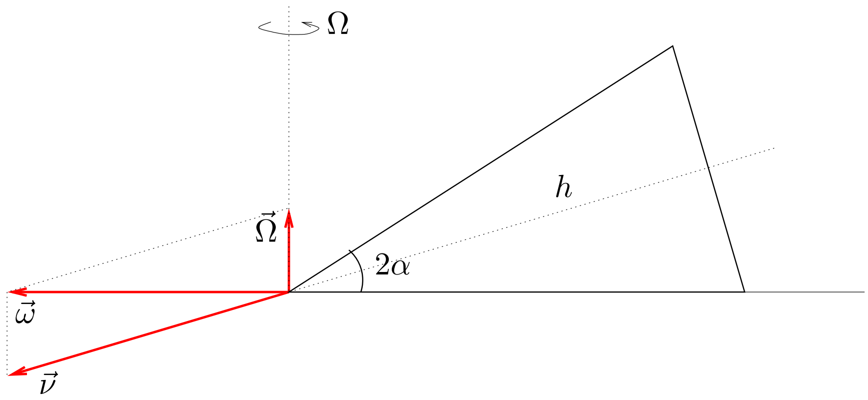
3. Rörelsemängsmomentet runt $\mathbf{P}$ är bevarat. Före stöten är det $L_{\mathbf{P}} = mv_0(1-\gamma)a + \frac{2}{5}ma^2\frac{v_0}{a} = (\frac{7}{5}-\gamma)mv_0a$, där v_0 är bollens fart före stöten. Bollens rotationhastighet ω runt $\mathbf{P}$ omedelbart efter stöten fås då enligt $\frac{7}{5}ma^2\omega = (\frac{7}{5}-\gamma)mv_0a$, dvs. $\omega = (1-\frac{5\gamma}{7})\frac{v_0}{a}$. Masscentrums fart är $v = (1-\frac{5\gamma}{7})v_0$. Man vill maximera vertikalkomponenten av hastigheten omedelbart efter stöten. Den är $v_z = v\cos\alpha$, där $\sin\alpha = 1-\gamma$, dvs.
$$v_z = v_0(1 - \frac{5\gamma}{7})\sqrt{\gamma(2-\gamma)}\ .$$
   Denna funktion av γ skall maximeras i intervallet $0 < \gamma < 1$. Standardförfarande ger att maximum fås för $\gamma = \frac{11-\sqrt{51}}{10} \approx 0.386$.



4. Inför ett koordinatsystem med origo i konens spets och z-axeln längs konens symmetriaxel. Skiva konen i cirkelskivor för varje z, med radien $r(z) = z\tan\alpha$. En sådan skiva har arean $A(z) = \pi z^2 \tan^2\alpha$. Konens volym är $V = \int_0^h A(z)dz = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha$, och dess densitet $\varrho = 3m/(\pi h^3 \tan^2\alpha)$. Massan för en cirkelskiva med tjockleken dz är $dm = \varrho A(z)dz = \frac{3m}{h^3}z^2 dz$. Dess tröghetsmoment m.a.p. spetsen blir $dI_{zz} = \frac{1}{2}dm(r(z))^2$, och (m.h.a. Steiner) $dI_{xx} = dI_{yy} = \frac{1}{4}dm(r(z))^2 + dmz^2$. Integration över z ger

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{5}mh^2(1 + \frac{1}{4}\tan^2\alpha) ,$$
$$I_{zz} = \frac{3}{10}mh^2\tan^2\alpha .$$

För att beräkna momentet som påverkar konen under rörelsen behöver man $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$. För att beräkna $\vec{L}$ behöver rotationsvektorn delas upp i spinn ($\vec{\nu}$) och precession ($\vec{\Omega}$, som är given). Eftersom linjen där konen är i kontakt med underlaget är i vila, måste $\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\nu}$ vara horisontell, och man får denna bild:



Man har alltså $\nu = \frac{\Omega}{\sin\alpha}$. Låt x-axeln peka snett uppåt vänster i figuren och y-axeln ut ur pappret. Då kan man skriva $\vec{\omega}$ i termer av de kroppsegna koordinaterna som

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\nu} = \Omega\cos\alpha\hat{x} + \Omega\sin\alpha\hat{z} - \frac{\Omega}{\sin\alpha}\hat{z} .$$

Rörelsemängdsmomentet blir

$$\vec{L} = \frac{3}{5}mh^2\Omega(1 + \frac{1}{4}\tan^2\alpha)\cos\alpha\hat{x} - \frac{3}{10}mh^2\Omega\sin\alpha\hat{z} .$$

Nu kan man använda $\vec{\Omega} \times \hat{x} = \Omega\sin\alpha\hat{y}$, $\vec{\Omega} \times \hat{z} = -\Omega\cos\alpha\hat{y}$, för att, efter litet förenkling, få fram det sökta momentet

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \frac{3}{20}mh^2\Omega^2\tan\alpha(1 + 5\cos^2\alpha)\hat{y}$$

(går att skriva på litet olika sätt).

5. Använd x och θ som generaliserade koordinater. Massans läge ges som $\vec{r} = (x+a\sin\theta)\hat{x}+(f(x)-a\cos\theta)\hat{z}$, och hastigheten blir $\vec{v} = (\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta)\hat{x} + (\dot{x}f'(x) + a\dot{\theta}\sin\theta)\hat{z}$. Lagrangianen är

$$L = T-V = \frac{1}{2}mv^2+mgz = \frac{1}{2}m\left((1+f'^2(x))\dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}(\cos\theta + f'(x)\sin\theta) + a^2\dot{\theta}^2\right)-mg(f(x)-a\cos\theta) \ .$$

Vill man linearisera för små rörelser kan man lika gärna göra det i Lagrangianen, där man sparar kvadratiska termer. Låt $f(x) \approx f(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2$. Bortsett från en konstant blir Lagrangianen till kvadratisk ordning

$$L \approx \frac{1}{2}m\left((\dot{x}+a\dot{\theta})^2 - g(f''(0)x^2 + a\theta^2)\right) \ .$$

Rörelseekvationerna för x och θ blir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{x}+a\dot{\theta}) + f''(0)gx = 0 \ , \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}+a\dot{\theta}) + g\theta = 0 \ . \end{aligned}$$

Härur syns att $\theta = f''(0)x$. (Detta kan förstås som att pendeln hela tiden håller sig vinkelrät mot kurvan.) Eliminering av θ ger differentialekvationen $(1+af''(0))\ddot{x} + f''(0)gx = 0$, vars lösningar är harmoniska svängningar med vinkelfrekvens

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a+\frac{1}{f''(0)}}} \ .$$

Kontroll: Då $f''(0)$ (som är den inversa krökningsradien) blir stor återfås vinkelfrekvensen hos en vanlig pendel. För ändligt $f''(0)$ blir det en vanlig pendel med längd $a+\frac{1}{f''(0)}$, som är det konstanta avståndet till cirkelns mitt.

(Vart tog den andra frihetsgraden vägen? I ljuset av kontrollen ovan är det som att dela upp ett viktlöst snöre i två delar, utan någon massa mellan. Den ytterligare frihetsgraden bär ingen kinetisk energi. Antag att man skulle tvinga systemet att börja i ett läge där $\theta \neq f''(0)x$, vad händer då? För att behandla den frågan måste man införa någon massa för snöret. $\theta = f''(0)x$ av samma anledning som ett snöre med försumbar massa är rakt.)