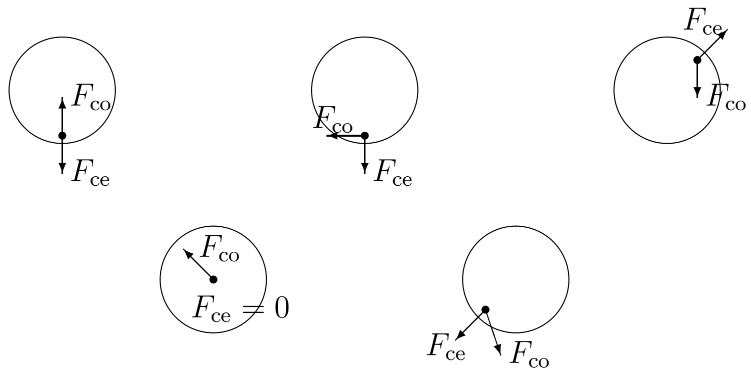
Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 23/5-2006.

1. a.



b. Corioliskraftens storlek och riktning i de sju fallen är respektive:
i) 1.4 N åt vä(n)ster ii) noll iii) 1.4 N uppåt iv) 1.4 N västerut
v) 1.4 N från jordaxeln vi) 0.7 N österut vii) noll.

2. Jag inför ett bilfixt koordinatsystem med x-axel i bilens accelerationsriktning och y-axel uppåt. Pendelns upphängningspunkt kallar jag B, dess längd ℓ, och dess utslagsvinkel från lodlinjen, i accelerationsriktningen, θ. Jag skriver ortsvektorn för pendelns masscentrum i ett inertialsystem som $\vec{r}_G = \vec{r}_B + \vec{r}_{G/B}$. Spänningen i snöret betecknas $\vec{S}$. Pendeln är en stel kropp. Ekvationerna för dess rotation kring masscentrum och dess masscentrums rörelse är

$$I_G \ddot{\theta} \hat{z} = -\vec{r}_{G/B} \times \vec{S},$$
$$m(a\hat{x} + \ddot{\vec{r}}_{G/B}) = \vec{S} - mg\hat{y}.$$

Relativa ortsvektorn $\vec{r}_{G/B}$ har längd ℓ och bestäms helt av vinkeln θ. Vi kan använda metoden med polära koordinater och skriva

$$\vec{r}_{G/B} = \ell \hat{r}, \qquad \ddot{\vec{r}}_{G/B} = -\ell\dot{\theta}^2 \hat{r} + \ell\ddot{\theta}\hat{\theta}.$$

Rörelseekvationerna är tre komponentekvationer för tre obekanta, (kraften $\vec{S}$'s två komponenter och vinkeln θ), så de skall räcka för att lösa uppgiften. Kraften $\vec{S}$ kan elimineras genom att vektormultiplicera första ekvationen med $\vec{r}_{G/B}$ och sedan addera ekvationerna. Eftersom kulans tröghetsmoment är försumbart får vi

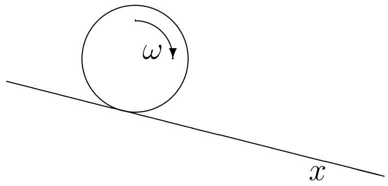
$$\vec{r}_{G/B} \times \ddot{\vec{r}}_{G/B} = \vec{r}_{G/B} \times (-a\hat{x} - g\hat{y})$$

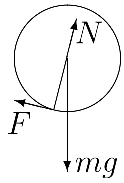
Detta ger den skalära ekvationen

$$\ell\ddot{\theta} = -a\cos\theta - g\sin\theta.$$

Denna ekvation kan alternativt och enklare härledas genom att observera att bilens acceleration ger en tröghetskraft i det bilfixa koordinatsystemet så att gravitationsaccelerationen $-g\hat{y}$ ersätts av $-a\hat{x} - g\hat{y}$.
Eftersom $a\cos\theta + g\sin\theta = \sqrt{a^2+g^2}\sin(\theta+\theta_0)$, med $\tan\theta_0 = a/g$, känner vi igen rörelseekvationen. Det är en plan pendel. Jämviktsläget är $\theta = -\theta_0$, och för små utslag ger approximationen $\sin(\theta+\theta_0) \approx \theta + \theta_0$ harmonisk svängning med periodtiden $T = 2\pi\sqrt{\ell/\sqrt{a^2+g^2}} \approx 1.54\,\mathrm{s}$. Om bilen kör med konstant hastighet gäller samma räkning fast med $a = 0$. Då blir periodtiden en faktor $((a^2+g^2)/g^2)^{1/4} \approx 1.010$ längre.

3. .





Rörelseekvationerna för rotation kring masscentrum och för translation ger

$$\begin{aligned} I_G\dot{\omega} &= aF, \\ m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - F, \\ 0 &= N - mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

(a är klotets radie.) Om klotet rullar så är $\dot{x} = a\omega$ och $F \le \mu N$. Vi eliminerar då F mellan de två första ekvationerna, ersätter ω med $\dot{x}/a$, löser ut $\ddot{x}$, använder tröghetsmomentet för homogen sfär, $I_G = ma^2 2/5$, och finner den sökta accelerationen vid rullning

$$\ddot{x}_{\text{rulln}} = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_G/a^2} = \frac{5}{7}g\sin\alpha.$$

Friktionskraften bestäms från den andra ekvationen, och normalkraften från den tredje. Rullningskriteriet $\mu \ge F/N$ blir

$$\mu \ge \frac{g\sin\alpha - \ddot{x}}{g\cos\alpha} = \frac{2}{7}\tan\alpha.$$

Om klotet glider så är $\dot{x} > a\omega$ och $F = \mu N$. Då bestäms vinkelacceleration och acceleration av de två första ekvationerna till

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{\text{glidn}} &= a\mu N/I_G = \mu\frac{5}{2}\cos\alpha\frac{g}{a}, \\ \ddot{x}_{\text{glidn}} &= g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \end{aligned}$$

Därmed är alla frågorna i uppgiften besvarade. Som en liten kontroll av räkningarna kan man från de sista ekvationerna beräkna

$$\ddot{x}_{\text{glidn}} - a\dot{\omega}_{\text{glidn}} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \mu\frac{5}{2}\cos\alpha) = g\cos\alpha(\tan\alpha - \frac{7}{5}\mu),$$

och kolla att detta är > 0 precis när rullningsvillkoret *inte* är uppfyllt.

4. Energi- och rörelsemängdskonserveringslagarna ger

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{m\gamma}{R} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{m\gamma}{R+h}, \\ L = mRv_0\cos\alpha &= m(R+h)v, \end{aligned}$$

där m är projektilens massa och v dess hastighet i banans högsta punkt. Detta är två ekvationer som bestämmer våra två obekanta, v och h. Eftersom h efterfrågas så eliminerar vi först v. Vi får en andragradsekvation för h

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Rv_0\cos\alpha}{R+h}\right)^2 - \frac{\gamma}{R+h} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\gamma}{R}.$$

Genom att använda den föreslagna dimensionslösa parametern x kan ekvationen skrivas enklare. Jag löser den så här

$$\frac{x\cos^2\alpha}{(1+h/R)^2} - \frac{1}{1+h/R} = x-1; \quad x = \frac{Rv_0^2}{2\gamma} = \frac{v_0^2}{2gR} \approx 0.2000$$
$$(1-x)(1+h/R)^2 - (1+h/R) + x\cos^2\alpha = 0;$$
$$1+h/R = \frac{1+\sqrt{1-4x(1-x)\cos^2\alpha}}{2(1-x)}; \quad h \approx 8.94\cdot 10^5\mathrm{m}.$$

När man beräknar numeriska värdet på h från det sista uttrycket skall man tänka på att det förekommer rätt stora kancellationer, och använda större numerisk noggrannhet i mellanleden än man normalt behöver. En fickräknares noggrannhet räcker mer än väl i det givna exemplet. Men om x vore mycket mindre skulle den kanske inte räcka. Då kan man i stället hitta enkla approximativa uttryck för h genom att potensserieutveckla i x och behålla bara de första termerna. Om man behåller bara termer lineära i x så får man det bekanta uttrycket

$$h \approx Rx(1-\cos^2\alpha) = v_0^2\sin^2\alpha/(2g) \approx 6.37\cdot 10^5\mathrm{m}.$$

I det givna exemplet är detta dock ingen god approximation.

5. Jag använder rumsfixa basvektorer $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$, och symmetriaxelfixa basvektorer $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, med $\hat{Z} = \hat{z}$ vertikal och $\hat{x}$ riktad längs stela kroppens symmetriaxel. De symmetriaxelfixa basvektorernas rotationsvektor är $\vec{\Omega} = \Omega\hat{Z}$. Stela kroppens rotationsvektor är $\vec{\omega} = \Omega\hat{z} + p\hat{x}$. I kontaktpunkten mellan stela kroppen och horisontella skivan skall bägge ha samma hastighet eftersom det är frågan om rullning utan glidning. Detta villkor bestämmer spinnet p:

$$-R\Omega'\hat{y} = R\Omega\hat{y} + ap\hat{y} \quad \Rightarrow \quad p = -(\Omega+\Omega')R/a.$$

De krafter som förekommer på den stela kroppen är: gravitationskraften, normalkraften $N\hat{y}$ i kontaktpunkten mellan skivorna, samt en lagerkraft i P. Enklaste sättet att komma åt normalkraften är att ställa upp rörelsemängdsmomentekvationen med avseende på punkten P, för i den bidrar lagerkraften inte. (Lagerkraften kan sedan bestämmas med masscentrums rörelseekvationer.)

$$\begin{aligned}
\vec{M}_P = R\hat{x}\times(N-mg)\hat{z} = \dot{\vec{L}}_P &= \frac{d}{dt}(I_\perp\Omega\hat{z} + I_\parallel p\hat{x}) = I_\parallel p\dot{\hat{x}} = I_\parallel p\vec{\Omega}\times\hat{x} \\
\Leftrightarrow \qquad -R(N-mg)\hat{y} &= -(ma^2/2)((\Omega+\Omega')R/a)\Omega\hat{y} \\
\Rightarrow \qquad N &= mg + ma(\Omega+\Omega')\Omega/2.
\end{aligned}$$

Detta är det sökta uttrycket för normalkraften. Är det rimligt? Det är lätt att kolla att dimensionerna stämmer. Det är också rimligt att $N = mg$ när $\Omega = 0$, för då är rörelsemängdsmomentet konstant. Men är det rimligt att $N \to mg$ även när $a \to 0$? Då går spinnet mot oändligheten som $1/a$. Men tröghetsmomentet i symmetriaxelriktningen går mot noll som a^2. Så horisontella, tidsberoende, komponenten av rörelsemängdsmomentet går ändå mot noll. Därför är det rimligt. Däremot förvånade det mig först att inte $N \to mg$ även när $R \to 0$, för även då blir rörelsemängdsmomentet tidsoberoende. Men tänker man efter förstår man hur beräkningarna, under givna antaganden, ändå kan vara riktiga. I gränsen $R \to 0$ går tidsberoende delen av rörelsemängdsmomentet mot noll, men det gör även normalkraftens momentarm, lika snabbt. I ett av stegen i beräkningen av normalkraften dividerade vi med R. Därför skall vi inte lita på uttrycket för N när R är exakt noll. Om R är litet så är bägge termerna i ekvationen små, och även då kan resultatet vara fel om det finns någon ytterligare liten term som vi har försummat därför att den är liten. En sådan term skulle finnas om vi har radiellt riktad friktionskraft i kontaktpunkten mellan skivorna. Normalt tänker man sig att denna kraft är försumbar jämfört med den radiellt riktade kraften i P, därför att kroppen rullar i kontaktpunkten. Och detta har antagits i denna lösning. Annars blir problemet mekaniskt obestämt. Men om R är tillräckligt liten är den förmodligen inte försumbar.