Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 27/5-2008.

1. Påståendena är sanna (S) respektive falska (F) enligt följande:
   a) S, b) S, c) F, d) S, e) F, f) S, g) F, h) S, i) S, j) F.

2. Pilens fart, v, kan uppskattas från kännedomen av dess massa, m, och dragkraften F som fordras för att dra bågens sträng tillbaka en sträcka a. Jag approximerar kraften som harmonisk. Då beskrivs den av en fjäderkonstant k så att $k = F/a$. När pilen skjuts omvandlas potentiell energi hos bågen till kinetisk energi för pilen. Man försummar andra energiformer och får ett samband för hastigheten från energilagen: $2E = mv^2 = ka^2$. I stort sett far pilen genom luften med konstant hastighet sträckan ℓ från skytt till måltavla; det tar tiden $t = \ell/v$. När pilen far genom luften ger corioliskraften en liten acceleration a_c vinkelrätt mot hastigheten, som orsakar att pilen träffar måltavlan ett litet stycke $d = a_c t^2/2$ vid sidan av den punkt den annars skulle träffa i. Eftersom a_c orsakas av corioliskraften, F_c, är $m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$. Ω är jordens rotationshastighet. (Observera att $\vec{a}_c$ är den fiktiva acceleration som orsakas av att skjutbanan roterar som jorden. a_c skiljer sig med ett minustecken från coriolisaccelerationen!) Eftersom det bara gäller en uppskattning kan vi anta att $\vec{\Omega}$ och $\vec{v}$ är vinkelräta (skjutbanan ligger i närheten av nordpolen) så att effekten blir maximal. Då har vi

$$d = \frac{a_c t^2}{2} = \frac{2\Omega v(\ell/v)^2}{2} = \frac{\Omega \ell^2}{v} = \Omega \ell^2 \sqrt{\frac{m}{aF}} \approx 0.7 \cdot 10^{-4} \cdot 90^2 \sqrt{0.023/(270 \cdot 0.75)} \approx 6\,\text{mm}.$$

Detta skall jämföras med storleken av träffel som fordras för poängavdrag. Tavlan är indelad i 10 cirkulära ringformade fält med bredd 122 mm / $2 \cdot 10 = 6$ cm. Detta är 10 gånger större än d, så slutsatsen blir att corioliskraften är försumbar. (Fast det vore kanske en ide att göra statistisk undersökning av minst tusen skott för att leta efter effekten).
Dimensionskontroll av sista formeluttrycket:

$$[\Omega \ell^2 \sqrt{\frac{m}{aF}}] = \frac{L^2}{T} \sqrt{\frac{M}{L} \frac{T^2}{ML}} = L = [d].$$

Rimlighetskontroll: Man kan försöka tänka efter om formeluttrycken för v i F, a, m och för d i Ω, ℓ, v är rimliga, tex det är rimligt att d ökar med ℓ eftersom ℓ är skjutavståndet, det är rimligt att ökningen är snabbare än lineär eftersom corioliskraften kröker banan.
Anm: Man kan alternativt uppskatta effekten så här. Antag för enkelhets skull (och för att vi vet att corioliskraften då blir maximal) att skytten står precis på nordpolen, och betrakta förloppet i ett inertialsystem i vilket skytten är i vila. Skytten siktar på måltavlan och pilen far rätlinjigt, men måltavlan rör sig med fart $\Omega \ell$ i en cirkelbana runt skytten. Pilen missar därför sitt mål med $d = \Omega \ell t = \Omega \ell^2/v$. Detta är samma uttryck som vi fick ovan, fastän argumenteringen var lite annorlunda. Det stärker vår tilltro till det.

3. Strategi. Jag inför ett koordinatsystem xyz fixerat i stela kroppen med origo i vinkeln och sådant att de två pinnarna ligger på positiva x och z axlarna. z axeln vertikal och x axeln pekande åt vänster i tesens figur. Stela kroppen är sammansatt av tre delar som vardera har enkel geometri och enkelt läge i koordinatsystemet. Därför är det inte svårt att beräkna rörelsemängd och rörelsemängdsmoment för den stela kroppen genom att addera delarnas. (Alternativt kan man beräkna de integraluttryck som följer direkt av

definitionerna.) Sedan ställs rörelsemängd- och rörelsemängdsmoment-lagarna upp. Kroppens rörelse är rotation $\omega\hat{z}$ kring origo och O. Alla tidsderivator är medföringsderivator. Kroppens rörelsemängd och rörelsemängdsmoment med avseende på origo är

$$\vec{P} = M\vec{\omega} \times a\hat{x} + \varrho a\vec{\omega} \times a/2\hat{x} = \omega a(M + a\varrho/2)\hat{y},$$
$$\vec{L} = a\hat{x} \times M(\vec{\omega} \times a\hat{x}) + \varrho a a^2/3\vec{\omega}. = a^2(M + a\varrho/3)\vec{\omega}.$$

Eftersom tyngdkraften får försummas påverkas kroppen bara av en kraft $\vec{F}$ och ett kraftmoment $\vec{M}$ från infästningen i O. Ekvationen för masscentrums rörelsemängd och för rörelsemängdsmoment med avseende på origo (origo är ju i vila), är

$$\vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{P} = -\omega^2 a(M + a\varrho/2)\hat{x},$$
$$\vec{M} + b\hat{z} \times \vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{L} = 0.$$

Det sökta momentet är alltså $\vec{M} = -b\hat{z} \times \vec{F} = w^2 ba(M + a\varrho/2)\hat{y}$. I figuren i tesen är det riktat mot åskådaren.
Dimensionskontroll av svaret (obs M = massa, $\vec{M}$ = kraftmoment):

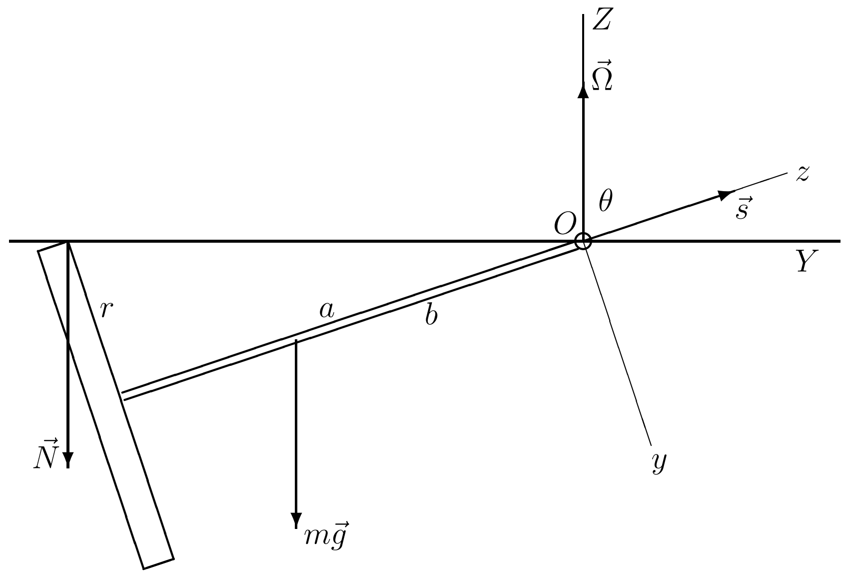
$$[a\varrho] = \mathrm{L}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} = \mathrm{M} = [M], \qquad [\vec{M}] = \mathrm{L}[F] = \mathrm{L}\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2} = \frac{\mathrm{ML}^2}{\mathrm{T}^2} = [\omega^2 abM].$$

Rimlighetskontroll. Man kan "förstå" detta uttryck om man delar upp stela kroppen i tre och resonerar så här. Massan M och pinnen a rör sig i cirkelbana runt origo med konstant vinkelhastighet. Detta kräver krafter $Ma\omega^2$ och $m_a a/2\omega^2$ verkande på dem ($m_a = \varrho a$ är pinnens massa). Om man frilägger partikeln och horisontella pinnen så inser man att det måste vara vertikala pinnen som drar i dem med denna kraft. På vertikala pinnens nedre ände verkar då motkraften. På vertikala pinnen verkar dessutom kontaktkrafter i upphängningspunkten. Tillsammans gäller kraftjämvikt och kraftmomentjämvikt för vertikala pinnen, eftersom den inte flyttar sig. Momentjämvikt kräver ett kraftmoment i upphängningspunkten som är av just den funna storleken.

4. Jag antar att jordbanan är cirkulär, och att jorden och kometens banor orsakas av solen, så att de följer Keplers lagar. Jag kallar jordens omloppstid T_e dess banradie R_e. Halleys komets omloppstid kallar jag T_h, dess största och minsta avstånd till solen R_+ och R_- respektive. Då vet vi att $T_h/T_e = 75.3$ och $R_-/R_e = 0.586$. Enligt Keplers första lag är kometens bana en ellips med storaxel $(R_+ + R_-)/2$. Enligt Keplers tredje lag förhåller sig storaxlarnas kuber som omloppstidernas kvadrater, dvs $(R_+ + R_-)/(2R_e) = (T_h/T_e)^{2/3} = 75.3^{2/3} = 17.832$. Det ger sökta avståndet $R_+ = (2 \cdot 17.832 - 0.586)R_e = 35.1R_e = 35.1\,\mathrm{AU}$.

5. Jag inför ett koordinatsystem X, Y, Z, med origo i O och sådant att $\hat{Z}$ pekar uppåt och $\hat{Y}$ åt höger, se schematiska figuren. Koordinatsystemet följer med snurran så att snurrans axel hela tiden ligger i YZ-planet. Jag inför också ett annat rörligt kordinatsystem x, y, z, sådant att snurrans axel ligger utefter negativa z-axeln. De två systemen har samma origo, och rör sig inte relativt varandra, men deras zeta-axlar bildar en vinkel θ. När snurran rullar i taket vrider sig koordinatsystemen kring Z-axeln med vinkelhastigheten $\Omega\hat{Z}$. Eftersom snurran rullar så har den också ett spin, $s\hat{z}$, kring sin symmetriaxel. Snurrans totala vinkelhastighet är $\vec{w} = \Omega\hat{Z} + s\hat{z} = (\Omega + s\cos\theta)\hat{Z} + s\sin\theta\hat{Y}$. För att snurran skall rulla utan att slira fordras att vinkelhastigheten är riktad som $\hat{Y}$, dvs att spinnet är $s = -\Omega/\cos\theta$. Snurrans rörelsemängdsmoment med avseende på origo uttrycks i dess huvudtröghetsmoment, $I_\parallel$ i symmetriaxelns riktning, och $I_\perp$ vinlelrätt mot symmetriaxeln: $\vec{\omega} = (\Omega\cos\theta + s)\hat{z} - \Omega\sin\theta\hat{y}$, $\vec{L} = (\Omega\cos\theta + s)I_\parallel\hat{z} - \Omega\sin\theta I_\perp\hat{y}$.

Tidsderivatan av rörelsemängdsmomentet är $\dot{\vec{L}} = \Omega \hat{Z} \times \vec{L} = \hat{X}\Omega \sin\theta(\Omega\cos\theta(I_\perp - I_\parallel) - sI_\parallel) = \hat{X}\Omega^2 \sin\theta(\cos\theta I_\perp + (\sin^2\theta/\cos\theta)I_\parallel)$. Detta måste överensstämma med totala kraftmomenten med avseende på origo på snurran, det är snurrans rörelseekvation. Vilka krafter och moment kan verka på snurran? Eventuell friktion mot luften försummar jag. I origo kan verka krafter från upphängningen, men eftersom vi bara är intresserade av kraftmoment med avseende på origo kan vi bortse från dem. Så finns gravitationskraften,



och en möjlig normalkraft från taket i hjulets kontaktpunkt. De ger bägge moment som pekar i riktning $\hat{X}$, dem måste vi ta med i beräkningen. Slutligen skulle det kunna finnas friktionskrafter från taket i hjulets kontaktpunkt. Men de är i så fall parallella med taket, så att deras moment blir vertikalt riktade. Eftersom vertikala komponenten av rörelsemängdsmomentet är tidsoberoende så måste friktionskraftens moment vara noll. Totala kraftmomentet blir $\vec{M} = (Nr/\cos\theta + mgb\sin\theta)\hat{X}$. Detta måste överensstämma med rörelsemängdsmomentets tidsderivata. Det blir en ekvation. Om den kan uppfyllas så kan hjulet rulla. Ur ekvationen kan normalkraften beräknas. Ekvationen är möjlig att uppfylla om man då får $N \geq 0$. Detta ger följande villkor för att hjulet skall rulla i taket

$$\Omega^2(I_\perp \cos^2\theta + I_\parallel \sin^2\theta) \geq mgb\cos\theta.$$

Dimensionskontroll: Alla termer i olikheten har samma dimension $\mathrm{ML^2/T^2}$.
Eftersom bägge termerna i vänsterledet är ≥ 0, så är, för given geometri, rullning alltid möjlig om bara Ω är stor nog.
Är resultatet rimligt? Man kan se på specialfall. Snurran består av en stav och ett hjul.
Fall a) Antag att staven är masslös och hjulets tröghetsradie noll. Då är $I_\parallel = 0$, $I_\perp = ma^2$, och $b = a$, och villkoret blir $\Omega^2 a\cos\theta \geq g$. Normalkraften är noll när likhet råder. Ekvationen kan skrivas $\tan\theta = a\sin\theta\Omega^2/g$. Detta är precis villkoret för konstant utslag för en sfärisk pendel, dvs ekvationen för lutningsvinkeln för ett snöre i vilket en massa hänger och svänger runt i en horisontell cirkelbana med radie $a\sin\theta$. Gravitationskraft, centrifugalkraft och snörspännig balanserar varandra. Detta ger en rimlighetskontroll på vår olikhet.
Fall b) Ett motsatt extremfall är när hjulets tröghetsradie är maximal, samma som hjulets radie. Jag antar för enkelhets skull också att $r << a$ så att $\sin\theta \approx 1$, $\cos\theta \approx r/a$, och att staven fortfarande är masslös. Då är $I_\parallel = mr^2$, $I_\perp \cos^2\theta \approx mr^2$, och olikheten blir $\Omega^2 2r \geq g$. Nu behöver Ω^2 bara vara hälften så stor som i fall a) för att hjulet skall rulla på taket. Hjulets ”gyroeffekt”, som saknades i a), bidrar tydligen nu med lika mycket som centrifugalkraften.