Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 15/1-2009.

1. a) Periodtiden är 0.10 procent mindre.
   b) Hastigheten skall ha en horisontell komponent riktad motsatt tågets färdriktning med storlek 100 km/h. Därtill kan den ha en godtycklig vertikal komponent. (Förutsatt att tågets bana är horisontell.)
   c) Hastighetens storlek är godtycklig, men den skall vara riktad som rotationsvektorn, dvs vertikal.

2. Lösningsprincip: Det vridande momentet är $\vec{N} = \dot{\vec{L}}$, där $\vec{L}$ är den stela kroppens rörelsemängdsmoment med avseende på origo. Den stela kroppen är sammansatt av tre stavar, och dess rörelsemängdsmoment är summan av dessas. För varje stav pekar rotationsvektorn i en symmetririktning, så att dess rörelsemängdsmoment enkelt kan beräknas som summan av rörelsemängdsmoment med avseende på dess masscentrum och rörelsemängdsmoment pga masscentrums rörelse. De tre stavarnas rörelsemängdsmoment är respektive

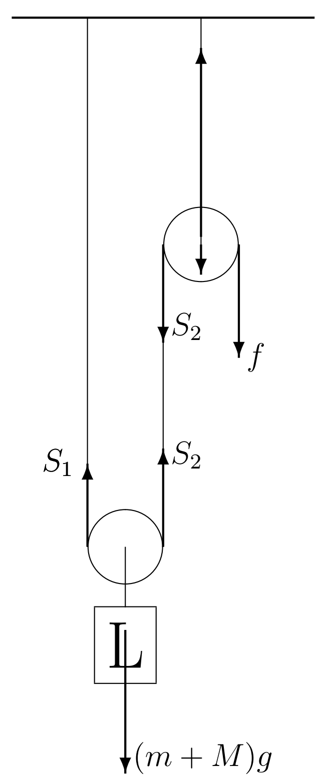
$$\begin{aligned}
&\vec{L}_1 = \frac{1}{3}\rho a a^2 \omega \hat{z} \\
&\vec{L}_2 = (a\hat{x} + \frac{1}{2}c\hat{z}) \times (\omega\hat{z} \times \rho c(a\hat{x} + \frac{1}{2}c\hat{z}) = \omega\rho(ca^2\hat{z} - \frac{1}{2}c^2 a\hat{x}) \\
&\vec{L}_3 = (a\hat{x} + c\hat{z} + \frac{1}{2}b\hat{y}) \times (\omega\hat{z} \times \rho b(a\hat{x} + c\hat{z} + \frac{1}{2}b\hat{y}) + \frac{1}{12}\rho b b^2 \omega\hat{z} = \\
&= \omega\rho b[(a^2 + \frac{1}{3}b^2)\hat{z} - ac\hat{x} - \frac{1}{2}bc\hat{y}]
\end{aligned}$$

Eftersom $\dot{\vec{\omega}} = 0$ ändrar sig rörelsemängdsmomentet i tiden bara genom att kroppen vrider sig, så att

$$\vec{N} = \vec{\omega} \times \vec{L} = \omega\hat{z} \times \omega\rho(-\frac{1}{2}c^2 a\hat{x} - -bac\hat{x} - \frac{1}{2}b^2 c\hat{y}) = \omega^2\rho[\frac{1}{2}b^2 c\hat{x} - (\frac{1}{2}ac^2 + abc)\hat{y}]$$

Detta är alltså det sökta kraftmomentet.

3. Jag kallar cylinderradierna a, cylindrarnas massor m, och L's massa M. Vänstra cylinderns hastighet uppåt kallar jag $v(t)$. Cylindrarna har tröghetsmoment $I = ma^2/2$ med avseende på sina axlar. Eftersom den vertikala delen av repet till vänster om L befinner sig i vila, så består vänstra cylindern rörelse i att den rullar uppför repet med vinkelhastighet $w_1 = v/a$. Det innebär att cylinderns periferi rakt till höger om dess centrum, och därmed den vertikala delen av repet till höger om cylindern, har hastigheten $2v$. Den högra cylindens masscentrum är stilla, så den högra cylindern måste rotera med vinkelhastighet $w_2 = 2v/a$. Spänningarna i repets vänstra, mellersta och högra vertikala delar kallar jag respektive S_1, S_2, och f. Nu kan man ställa upp tre rörelseekvationer, en för vänstra blocket + viktens vertikala rörelse, samt de två ekvationerna för cylindrarnas rotation med avseende på sina axlar:



$$\begin{aligned}
(m + M)\dot{v} &= S_1 + S_2 - (m + M)g \\
I\dot{\omega}_1 &= a(S_2 - S_1) \\
I\dot{\omega}_2 &= a(f - S_2)
\end{aligned}$$

Eftersom vi inte känner och inte är intresserad av S_1 och S_2, så bildar vi den lineärkombination av dessa ekvationer som inte innehåller dem:

$$(m+M)\dot{v} + I\dot{\omega}_1/a + 2I\dot{\omega}_2/a = -(m+M)g + 2f$$

Med hjälp av våra ovan nämnda uttryck för vinkelhastigheterna och för tröghetsmomentet kan denna ekvation skrivas:

$$(m+M+m/2+2m)\dot{v} = 2f - (m+M)g$$

Härav finner vi den efterfrågade accelerationen:

$$\dot{v} = \frac{2f-(m+M)g}{M+7m/2} = 12.8\,\mathrm{m/s^2}$$

Kontroller av vårt uttryck: Att dimensionerna stämmer kollar man förstås. Det är också lätt att kontrollera att systemet kan befinna sig i vila om $2f = (m+M)g$. Då är spänningen lika stor överrallt i repet. Ett annat enkelt fall är om $f=0$ och $m=0$. Då är spänningen i repet noll, så vikten måste fallla fritt med acceleration $-g$. Den enda detaljen av vår formel som inte verifieras av dessa kontroller är termen $7m/2$ i nämnaren, som orsakas av trissornas tröghet.

4. En stel kropps rörelse relativt sitt masscentrum beskrivs av vinkelhastigheten $\vec{\omega}(t)$, som ger ett rörelsemängdsmoment med avseende på masscentrum $\vec{L}$. När kroppen, liksom rymdskeppet efter avskjutningen av rymdfarkosten, inte påverkas av yttre krafter, så är rörelsemängdsmomentet konstant. Rörelsmängdsmomentet kan beräknas från vinkelhastighet och tröghetstensor. När kroppen, liksom rymdskeppet, har en symmetriaxel, så delar man upp vinkelhastigheten i en komponent i symmetriaxelns riktning, och en vinkelrät komponent. Dessa riktningar är huvudtröghetsriktningar, så man får rörelsemängdsmomentet genom att multiplicera vardera komponent med sitt tröghetsmoment och addera. Härav ser man att symmetriaxeln, rotationsvektorn, och rörelsemängsmomentet ligger i ett plan, så att man kan uttrycka dem med hjälp av en enhetsvektor i symmetriaxelns riktning, $\hat{z}$, och en i rörelsemängdsmomentets riktning, $\hat{Z}$:

$$\vec{\omega} = \Omega\hat{Z} + s\hat{z} \qquad \vec{L} = L\hat{Z}$$

Ω och s är rymdskeppets precessionshastighet och spinn. För att uttrycka rörelsemängdsmomentet i vinkelhastigheten behöver vi uttrycka $\hat{Z}$ i $\hat{z}$ och en vinkelrät basvektor, $\hat{Z} = \cos\theta\hat{z} + \sin\theta\hat{n}$:

$$\vec{\omega} = \Omega\sin\theta\hat{n} + (s+\Omega\cos\theta)\hat{z}$$
$$\vec{L} = I_\perp\Omega\sin\theta\hat{n} + I_\parallel(s+\Omega\cos\theta)\hat{z} = I_\perp\Omega\hat{Z} + (I_\parallel s + (I_\parallel - I_\perp)\Omega\cos\theta)\hat{z}$$

Nu till mer specifika detaljer. Jag kallar rymdstationens massa M och dess radie R. Före rymdfarkostuppskjutningen roterar den kring sin symmetriaxel, $\hat{z}$, med vinkelhastighet ω_0 så att $R\omega_0^2 = 0.75g$. Den har då rörelsemängdsmoment $\vec{L}_0 = L_0\hat{z} = I_\parallel\omega_0\hat{z} = MR^2\omega_0\hat{z}$. Farkostavskjutningen ger rymdfarkosten ett rörelsemängdsmomenttillskott vinkelrätt mot $\vec{L}_0$, $\Delta\vec{L} = \Delta L\hat{n}$, med $\Delta L = RI$. Det totala rörelsemängdsmomentet är $\vec{L} = L_0\hat{z} + \Delta L\hat{n} = L_0(\hat{z} + (\Delta L/L_0)\hat{n}) = L\hat{Z}$. Vinkeln mellan symmetriaxeln och rörelsemängdsmomentet blir

$$\tan\theta = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{I}{MR\omega_0} = \frac{I}{M\sqrt{0.75Rg}} = 0.0521$$

Vinkeln blir $\theta = 3.0°$. Den är så liten att vi kan approximera $\cos\theta$ med 1. Eftersom rymdskeppet är nästan en cirkelring är dess tröghetsmoment $I_\parallel = MR^2 = 2I_\perp$. Jämförelse mellan de olika uttrycken för $\vec{L}$ ovan ger $I_\parallel s + (I_\parallel - I_\perp)\Omega\cos\theta = 0$, och $I_\parallel(s + \Omega\cos\theta) = L_0 = I_\parallel\omega_0$. De ger

$$\Omega = -2s = 2\omega_0 = 2\sqrt{0.75g/R} = 0.77\,\mathrm{rad/s}$$

Den lilla rymdfarkostavskjutningen får alltså det stora rymdskeppets spin att byta tecken och ändras från ω_0 till s. Det kan tyckas konstigt, men orsakas bara av en slags koordinatsingularitet. Eftersom vinkeln θ är så liten, och $\Omega + s = \omega_0$, så är rymdskeppets rotationsrörelse inte mycket förändrad.

5. Farkostens bana är en ellips, och vi känner dess minsta och största avstånd från solen, de är jordbanans, r_1, och marsbanans, r_2. Farten i motsvarande punkter av banan, perihelion och aphelion, kallar jag v_1 och v_2. Vi vill veta v_1, för då kan vi beräkna sökta hastighetstillskottet som $\Delta v = v_1 - v_j$, där v_j är jordens hastighet. Energi- och rörelsemängds-konserveringslagarna ger två ekvationer som bestämmer v_1 och v_2:

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{mMG}{r_1} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{mMG}{r_2}$$
$$mr_1v_1 = mr_2v_2$$

Jag löser ut v_2 ur andra ekvationen och stoppar in uttrycket i första. Sedan löses v_1 ur den resulterande ekvationen med resultatet

$$v_1^2 = \frac{2}{1 + r_1/r_2}\frac{MG}{r_1}.$$

Jordens hastighet kan beräknas på samma sätt. Det blir samma formel, fast med $r_2 = r_1$. Slutligen finner man

$$\Delta v = \sqrt{\frac{MG}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2}{1 + r_1/r_2}} - 1\right) = 10^4 \cdot 2.9747\,\mathrm{m/s} \cdot 0.097380 \approx 0.290\,\mathrm{km/s}$$

Detta skall jämföras med flykthastigheten, v_e, från jorden. Den kan beräknas med hjälp av energilagen, jordmassan M_j och tyngdaccelerationen vid jordytan g:

$$v_e^2/2 = M_jG/R \qquad g = M_jG/R^2$$
$$v_e = \sqrt{2GR} \approx 11\,\mathrm{km/s}$$

Detta är ju långt ifrån mycket mindre än Δv. Av våra beräkningar drar vi därför slutsatsen att mer detaljerade beräkningar krävs.

6. Tillägg till uppgift 2. Om man har tid bör man fundera över om svaret är rimligt. Alternativt kan man lösa uppgiften på ett annat sätt: Jag tänker mig att systemet $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ är kroppsfixt. I detta system ger rotationsrörelsen tröghetskrafter. Var och en av de tre stavarna påverkas av en centrifugalkraft. Dessa centrifugalkrafter ger kraftmoment med avseende på origo. Eftersom stela kroppen inte rör sig relativt systemet, måste den påverkas av ett kompenserande kraftmoment. Det är det sökta momentet, och det är inte svårt att beräkna. Tex bidrar centrifugalkraften på översta staven med

$$-\rho b(a\hat{x} + (b/2)\hat{y} + c\hat{z}) \times (a\hat{x} + (b/2)\hat{y})\omega^2 = \rho bc((b/2)\hat{x} - a\hat{y})\omega^2$$

Resten kommer från centrifugalkraften på mellersta staven.