Dugga 2, Mekanik F del 2, 4 maj 2015

De flesta frågorna försöker behandla begrepp snarare än problemlösning. Det mesta rör det vi gjort under veckorna 4-7 av kursen, men det kan finnas inslag av annat, t.ex. stoff från Mekanik 1.

Tänk på att idén med duggan inte är att man skall visa någon att man är duktig, utan att man skall hjälpa sig själv att identifiera saker man har oklara begrepp om. Hinner du inte med alla uppgifter, försök att formulera en strategi för lösning.

---

1. Ange om följanden påståenden är sanna eller falska:

---

i) (S) En homogen sfär och en homogen kub med samma densitet har båda tröghetsmatriser som är proportionella mot enhetsmatrisen, och reagerar därför exakt likadant på ett yttre vridande moment, om relationen mellan sfärens radie och kubens sida väljs på ett lämpligt sätt.

ii) (F) Centrifugalkraften är den kraft som åstadkommer centripetalaccelerationen.

iii) (S) Om en kropp i ett visst ögonblick roterar med en viss rotationsvektor och rörelsemängdsmomentet momentant är parallellt med rotationsvektorn kan man sluta sig till att de pekar längs en huvudtröghetsaxel.

iv) (F) Om en kropp i något (ortogonalt) koordinatsystem har samtliga deviationsmoment noll gäller detta i alla system.

v) (S) Om en kropp i något (ortogonalt) koordinatsystem har samtliga deviationsmoment noll och de tre tröghetsmomenten lika gäller detta i alla system.

vi) (S) Om två huvudtröghetsmoment är lika, är också varje axel i det plan som spänns av motsvarande huvudtröghetsaxlar en huvudtröghetsaxel med samma huvudtröghetsmoment.

vii) (F) Tröghetsmomentet, för en tunn regelbunden femhörning med konstant massa per ytenhet och total massa m, med avseende på en axel genom mittpunkten och vinkelrät mot femhörningens plan, är $\frac{\sqrt{5}}{2}ma^2$, där a är avståndet från mittpunkten till ett av hörnen.

viii) (S) Om man dubblerar alla dimensioner hos en kropp, utan att ändra densiteten, blir tröghetsmomenten 32 gånger så stora.

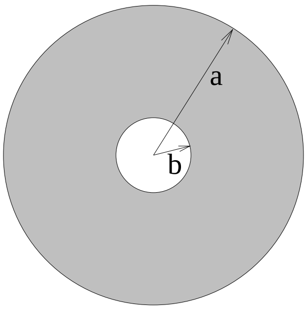
ix) (F) Att en svängning är kritiskt dämpad betyder att det uppstår resonans.

x) (F) Ju starkare dämpat ett linjärt system är, desto snabbare går det mot sitt jämviktsläge.

xi) (S) Vid harmonisk svängning är tidsmedelvärdena av de kinetiska och potentiella energierna (den senare räknad som noll i jämviktsläget) lika.

2. Frågor med svarsalternativ:

i) Hur stort är tröghetsmomentet m.a.p. symmetriaxeln för cirkelskivan med ett centralt placerat hål enligt figuren (kroppens massa är m)?



$\frac{1}{4}m(a^2-b^2)$ $\qquad$ $\frac{1}{2}m(a^2-b^2)$ $\qquad$ $\frac{1}{4}m(3a^2+b^2)$ $\qquad$ $\frac{1}{2}m(a^2+b^2)$

Endast det sista alternativet ger rätt gräns då $b \to 0$ och ökar med b. Dessutom är gränsen rätt då $b \to a$, men den stämmer även för det tredje alternativet.

ii) Om längderna för skivan i uppgift d) görs dubbelt så stora (med samma massa per areaenhet), hur många gånger större blir tröghetsmomentet?

2 $\qquad$ 4 $\qquad$ 8 $\qquad$ 16

16. 2^2 för massan och 2^2 för två längder.

iii) Man beräknar tröghetsmatrisen för en kropp, och får resultatet

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5\sqrt{3} \\ 0 & -5\sqrt{3} & 11 \end{bmatrix} \text{ kg m}^2 .$$

Hur stora är kroppens huvudtröghetsmoment (i kg m^2)?

(1,1,11) $\qquad$ (1,4,16) $\qquad$ (1,-4,16) $\qquad$ Man har räknat fel

Man har räknat fel. Egenvärdena är som i det tredje alternativet, men ett tröghetsmoment kan inte vara negativt.

iv) Vilka av följande påståenden är korreka?

Två huvudtröghetsaxlar svarande mot lika stora huvudtröghetsmoment är alltid ortogonala.	Rörelsemängdsmomentet för en stel kropp är bevarat, förutsatt att det inte förekommer inre dissipativa krafter.	Alla egenvärden till en reell symmetrisk matris är positiva reella tal.	Symmetriaxeln för en rotationssymmetrisk kropp är en huvudtröghetsaxel.

Endast det sista.

v) En pendel består av ett litet klot med massan m upphängd i ett lätt snöre med längden ℓ. Periodtiden för små svängningar kring jämviktsläget är T. Vad är periodtiden för en lika lång smal stav med samma massa, upphängd i sin ändpunkt?

$\frac{1}{\sqrt{3}}T$ $\quad\sqrt{\frac{2}{3}}\,T$ $\quad\sqrt{\frac{3}{2}}\,T$ $\quad\sqrt{3}\,T$

Det andra alternativet.

---

3. Nedan ges två exempel på resultat från uträkningar i mekanikproblem. Beskriv för vart och ett av dem hur en rutinmässig kontroll visar att svaret är felaktigt. Föreslå för vart och ett av resultaten en enkel förändring som gör det rimligt. Observera att det inte frågas efter en lösning av uppgifterna.

---

i) Vid en uträkning av tröghetsmatrisen för ett homogent rätblock med sidorna a, b och c m.a.p. masscentrum i ett koordinatsystem där koordinataxlarna är parallella med rätblockets sidor fås resultatet

$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}(b^2+2c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}(c^2+2a^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}(a^2+2b^2) \end{bmatrix} \quad .$$

Tröghetsmomentet m.a.p. x-axeln måste vara detsamma om man byter b och c mot varandra. Och motsvarande gäller de övriga komponenterna. Om man tar bort de tre 2:orna ser det rimligt ut.

ii) Man vill beräkna storleken på en väteatom. I Schrödingerekvationen som beskriver elektronens vågfunktion kring protonen ingår konstanterna $\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34}$ Js (Plancks konstant), $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{Nm}^2)$ (dielektricitetskonstanten i vacuum), $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31}$ kg (elektronmassan) och $e \approx 1.60 \times 10^{-19}$ C (elektronladdningen). Resultatet blir att atomens ungefärliga radie är

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e} \quad .$$

Svaret har fel dimension. Om elektronladdningen i nämnaren hade stått kvadrerad skulle dimensionerna stämma.

---

4. Uppgifter att (läsa och rita och) lösa:

---

i) En stel kropp består av en homogen sfär med massan m och radien r samt en tunn ring med massan m placerad längs sfärens ekvator ($z = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$). Skriv ned tröghetsmomenten m.a.p. x-, y- och z-axlarna samt alla deviationsmoment.

$I_x = I_y = \frac{9}{10}mr^2$, $I_z = \frac{7}{5}mr^2$. *Deviationsmomenten är noll i detta system.*

ii) En kula är trädd på en cirkelformad ståltråd och kan glida friktionsfritt på den. Ringen är vertikalt ställd och roterar kring den vertikala diametern med den konstanta vinkelhastigheten ω. Skriv ned rörelseekvationen för kulan. För alla värden på ω, bestäm jämviktslägena för kulan, och undersök deras stabilitet. För eventuella stabila jämviktslägen, bestäm vinkelfrekvensen för små svängningar kring dem.

Man kan skriva upp ekvationen i ett roterande system. Den enda fiktiva kraften som verkar längs cirkelbågen är centrifugalkraften. Rörelseekvationen blir $\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta(1 - \frac{a\omega^2}{g}\cos\theta) = 0$*. Jämviktsläget i* $\theta = \pi$ *är alltid instabilt. Jämviktsläget i* $\theta = 0$ *är stabilt då* $\omega^2 < \frac{g}{a}$ *och instabilt då* $\omega^2 > \frac{g}{a}$*. Då* $\omega^2 > \frac{g}{a}$ *finns stabila jämviktslägen i* $\theta = \theta_\pm = \pm\arccos\frac{g}{a\omega^2}$*. Små svängningar kring* $\theta = 0$ *har* $\omega_n^2 = \frac{g}{a} - \omega^2$*. Små svängningar kring* $\theta = \theta_\pm$ *har* $\omega_n^2 = \omega^2 - \left(\frac{g}{a\omega}\right)^2$*.*

iii) En stel kropp består av fyra punktmassor, vardera med massan μ. Punktmassorna är sammanfogade med lätta pinnar så att de (i ett koordinatsystem som är fixt relativt kroppen) befinner sig i punkterna $(a\sqrt{3}, 0, a)$, $(-a\sqrt{3}, 0, a)$, $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, -a)$ och $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}, -a)$. Finn huvudtröghetsmoment och huvudtröghetsaxlar för kroppen! Glöm inte att göra någon rimlighetskontroll!

Tröghetsmatrisen blir

$$I = 2\mu a^2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} .$$

z-axeln är en huvudtröghetsaxel, med tröghetsmoment $14\mu a^2$*. De övriga huvudtröghetsaxlarna pekar i riktningarna* $(1, -2, 0)$*, med tröghetsmoment* $16\mu a^2$*, samt* $(2, 1, 0)$*, med tröghetsmoment* $6\mu a^2$*.*

iv) En vertikal cylinder med densitet ρ, höjd h och radie r flyter i en vätska med densiteten $\rho_0 > \rho$. När den rör sig i vertikalled påverkas den av ett visköst motstånd som för låga hastigheter ges av Stokes lag, $F_v = k\eta r v$, där k är en dimensionslös konstant och η är vätskans viskositet. För vilket värde på viskositeten är små svängningar kritiskt dämpade?

$\eta = \frac{2\pi r}{k}\sqrt{\rho\rho_0 g h}$.