Dugga 3, Mekanik F del 2, 20 maj 2016

De flesta frågorna försöker behandla begrepp snarare än problemlösning. En rör det vi gjort under veckorna 6-7 av kursen, men det kan finnas inslag av annat, t.ex. stoff från Mekanik 1.

Tänk på att idén med duggan inte är att man skall visa någon att man är duktig, utan att man skall hjälpa sig själv att identifiera saker man har oklara begrepp om. Hinner du inte med alla uppgifter, försök att formulera en strategi för lösning.

---

1. Ange om följanden påståenden är sanna eller falska:

---

i) (F) Vid harmonisk svängning minimeras tidsmedelvärdet av den potentiella energin.

ii) (F) En stel kropp, vars masscentrum är inskränkt till att röra sig i xy-planet, har 3 frihetsgrader.

iii) (S) Lagranges formalism kan användas på system som inte beskrivs av Newtonsk mekanik.

iv) (S) En konsekvens av Snells lag är att en ljusstråle tar den väg mellan två givna punkter som tar kortast tid.

v) (S) Verkansprincipen, tillämpad på statikproblem, är ekvivalent med att söka stationära punkter till en potential.

---

2. Frågor med svarsalternativ:

---

i) Hur många konserverade storheter, förutom energin, finns för en partikel som rör sig på en sfär utan inverkan av krafter (utom den normalkraft som krävs för att hålla kvar den på sfären)?

0   1   2 $\underline{3}$ 4

i) Hur många konserverade storheter, förutom energin, finns för en partikel som rör sig på en ellipsoid med halvaxlar a, b och c (alla olika) utan inverkan av krafter (utom den normalkraft som krävs för att hålla kvar den på ytan)?

$\underline{0}$ 1   2   3   4

3. Uppgifter att (läsa och rita och) lösa:

i) En kula är trädd på en cirkelformad ståltråd och kan glida friktionsfritt på den. Ringen är vertikalt ställd och roterar kring den vertikala diametern med den konstanta vinkelhastigheten ω. Skriv ned rörelseekvationen för kulan m.h.a. Lagranges ekvationer. För alla värden på ω, bestäm jämviktslägena för kulan, och undersök deras stabilitet. För eventuella stabila jämviktslägen, bestäm vinkelfrekvensen för små svängningar kring dem.

Se förra duggan.

ii) Två små kroppar, vardera med massan m, är förbundna med ett lätt snöre med längden ℓ. Den ena kroppen glider friktionsfritt på ytan $z = 0$ (z-axeln är vertikal). Snöret löper friktionsfritt genom ett hål i planet, och den andra kroppen hänger i snöret (som är vertikalt nedanför hålet — den nedre kroppen pendlar inte). Härled rörelseekvationerna för kulan som glider på planet. Kan den röra sig på konstant radie från hålet, och isåfall, är en sådan bana stabil? Om den är stabil, vad blir vinkelfrekvensen för små oscillationer kring den cirkulära banan?

Lagrangefunktionen blir $L = \frac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgr$ i lämpliga koordinater. Ekvationen för ϕ ger att $r^2\dot{\phi}$ är konstant. Kalla denna konstant ℓ. Ekvationen för radien blir då

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{2r^3} + \frac{1}{2}g = 0\,.$$

"Jämvikt" då $r = r_0 = \left(\frac{\ell^2}{g}\right)^{1/3}$. Banan är stabil, och vinkelfrekvensen för små svängningar ges av $\omega^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{g^2}{\ell}\right)^{2/3}$. Om man inför $\omega_0 = \frac{\ell}{r_0^2}$ (vinkelhastigheten för rörelsen i ϕ-led vid jämvikt), är $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}\omega_0$.

iii) Uppgift 43 i kompendiet.

iv) Uppgift 78 i kompendiet.

v) Litet överkurs: En tunn (instrument)sträng med längd L, densitet ρ (massa/volymsenhet) och spänning S (kraft/areaenhet) utför små transversella svängingar. Vilken frekvens får dess grundton?

Ett litet längdelement av strängen har en massa $dm = \rho A dx$. Man kan teckna den kinetiska energin som

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \dot{y}^2 \rho A\, dx\,.$$

där $y(x)$ är funktionen som beskriver strängens transversella läge. Den potentiella energin fås till lägsta ordning m.h.a. strängens längd,

$$V = \int_0^L SA(\sqrt{1+y'^2} - 1)dx \approx \frac{1}{2}\int_0^L SAy'^2\, dx\,.$$

Verkan är

$$S = \frac{1}{2}\rho A \int dx\, dt \left(\dot{y}^2 - \frac{S}{\rho}y'^2\right)\,.$$

Variationsprincipen ger ekvationen

$$\ddot{y} - \frac{S}{\rho} y'' = 0\,,$$

vars lösningar är vågor som rör sig med farten $c = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$. *Grundtonens frekvens bestäms av* $c = 2Lf$, *dvs.*

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{\rho}}\,.$$