

Stelkroppsrörelse i rummet

Inlämningsuppgift 2016: Mekanik F, del 2 (FFM521)

11 april 2016

Martin Cederwall*, Hans Malmström†

Målet med denna uppgift är att undersöka rotationsrörelsen hos en stel kropp i tre rumsdimensioner. För godkänt krävs att ni har uppnått nivån “godkänt” på samtliga bedömningskriterier (se sida 5).

Problemformulering

Uppgiften är uppdelad i följande delproblem:

1. Eulers ekvationer

Rörelseekvationen som beskriver en stel kropps rotationsrörelse i tre dimensioner fås från vridmomentsekvationen

$$\sum \vec{M} = \dot{\vec{L}}, \quad (1)$$

som kan formuleras med avseende på allmän punkt (oftast masscentrum eller en fix punkt). För att göra detta till en rörelseekvation behöver vi relatera rörelsemängdsmomentet \vec{L} till rotationsvektorn $\vec{\omega}$. Dessa två vektorer är inte nödvändigtvis parallella utan generellt sett gäller att $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$, där \mathbf{I} är en matris. I detta steg väljer man oftast att övergå till ett kroppsfixt koordinatsystem och uttrycka samtliga storheter i detta.

(a) Beskriv kortfattat, och med egna ord, varför man väljer att göra detta. Vad är det för stor fördel man vinner med att införa kroppsfixa koordinataxlar som uppväger att man då måste arbeta med ett icke-inertialsystem?

(b) Antag att vi har identifierat ett kroppsfixt koordinatsystem vars axlar sammanfaller med kroppens s.k. huvudtröghetsaxlar. Teckna rörelseekvationerna explicit för detta fall. Detta är en form av Eulers ekvationer.

(c) Antag nu att det externt vridande momentet är noll. Formulera rörelseekvationerna som en uppsättning första ordningens, kopplade, icke-linjära differentialekvationer för följande två specialfall:

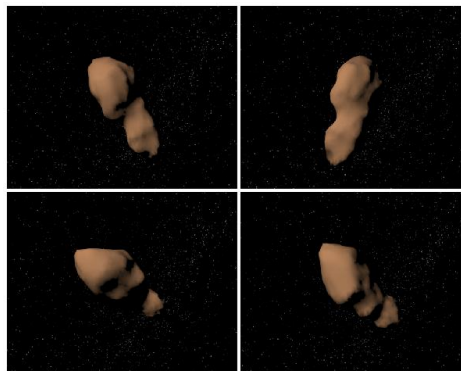
- (i) Stel kropp med huvudsymmetriaxel så att huvudtröghetsmomenten uppfyller $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = I_0 < I_{\zeta\zeta} = I_{\zeta}$, där $\hat{\zeta}$ alltså är huvudsymmetriaxeln.
- (ii) Asymmetrisk stel kropp för vilken huvudtröghetsmomenten uppfyller $I_{\xi\xi} < I_{\eta\eta} < I_{\zeta\zeta}$. Definiera dimensionslösa storheter $\gamma_{\xi} \equiv (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta})/I_{\xi\xi}$; $\gamma_{\eta} \equiv (I_{\zeta\zeta} - I_{\xi\xi})/I_{\eta\eta}$; $\gamma_{\zeta} \equiv (I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})/I_{\zeta\zeta}$.

*Fundamental fysik, Chalmers, martin.cederwall@chalmers.se

†Avdelning för fackspråk och kommunikation, Chalmers, mahans@chalmers.se

2. Asteroid 4179 Toutatis

Asteroiden Toutatis passerar med jämna mellanrum väldigt nära jorden. Så sent som den 29/9 år 2004 passerade den på avståndet 0.0104 AU (ungefär 4 månnavstånd). På grund av asteroidens ojämna form uppvisar den en wobblande rotationsrörelse. Dess närhet till diverse tyngre himlakroppar gör dessutom dess rörelsebana något svåröversägligbar (detta externa vridmoment kan dock försummas nedan).



Se vidare information på:

- <http://neo.jpl.nasa.gov/images/toutatis.html> (NASA's near-earth objects information page)
- http://en.wikipedia.org/wiki/4179_Toutatis

Approximera formen hos asteroiden Toutatis på två olika sätt:

- (a) Rotationssymmetrisk stel kropp. En artikel i Science¹ utnyttjar en enkel modell där asteroiden beskrivs som två homogena sfärer i kontakt med varandra (med radier $R_1 = 1.5$ km och $R_2 = 2.5$ km).
- (b) Asymmetrisk stel kropp. Huvuddragen i modellen av asteroidens form skall vara samma som i modell (i). Dvs utsträckningen i en riktning är betydligt längre än i de två andra, som i sin tur är ganska lika varandra.

Studera därefter asteroidens rotationsrörelse utgående från dessa två modeller. Rörelse-ekvationerna kan lösas analytiskt för den rotationssymmetriska kroppen. Men en numerisk lösning rekommenderas starkt för den asymmetriska modellen.

Enligt observationer uppvisar asteroidens rotationsvektor en sorts precessionsrörelse runt asteroidens långa axel (dvs den huvudtröghetsaxel runt vilken tröghetsmomentet är som lägst) med en genomsnittlig periodtid på 7,35 dygn. Vid en observation uppmättes rotationsvektorn momentant till $\vec{\omega} = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) = (20, 32, 98)$ grader/dag, där ζ -axeln är den långa axeln.

Er simulering bör framförallt besvara frågorna:

- Hur ser asteroidens rotationsrörelse ut för den rotationssymmetriska modellen av asteroiden? Kan ni återskapa och demonstrera den observerade precessionsrörelsen?
- Hur förändras rotationsrörelsen om ni istället använder den asymmetriska modellen?

Målet är vidare att studera dynamiska storheter och huruvida dessa är konserverade eller ej. En läsare bör få information kring följande frågeställningar utgående från er rapport:

- **Stabilitet hos rotationsrörelsen**

Finns det komponenter av rotationsvektorn som är konstanta i ett kroppsfixt koordinatsystem? Mer specifikt: är rotationskomponenterna i ξ -, η -, ζ -riktningarna

¹R. S. Hudson and S. J. Ostro, "Shape and Non-Principal Axis Spin State of Asteroid 4179 Toutatis", Science, Vol. 270, no. 5233 (1995) pp. 84-86.

stabila eller tidsberoende? I det senare fallet, uppvisar de i så fall periodiska variationer?

- **Konserverade storheter**

Studera längd och riktning på kroppens rotationsvektor och rörelsemängdsmoment samt dess kinetiska energi (enbart rotationsenergi).

Notera speciellt att skilja på vektorstorheter och skalärer samt på inertial- och det kroppsfixa koordinatsystemet.

Redovisning

Arbetet redovisas med en skriftlig rapport som laddas upp via Ping-Pong. Rapporten skall vara på maximalt åtta (8) sidor exklusive titelsidan, kamratbedömning samt programkod. Rapporten skall skrivas i $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ / $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Den skall innehålla namn, personnummer och epostadresser för bägge författarna. Läsaren får antas vara bekant med problembeskrivningen och rapporten behöver därför ej inkludera introduktion eller bakgrund. Den skall däremot innehålla resultat, analys och diskussion med effektivt utformade och kommenterade figurer.

- Gruppstorlek: 2 personer.
- Inlämning via Ping-Pong:
<https://pingpong.chalmers.se/launchCourse.do?id=6797>
- En fil per grupp. Använd pdf-format.
- Rapporten skall innehålla kod och kamratbedömning som appendix. Kamratbedömning utformas enligt mall på sida 6, eller motsvarande.
- Betyg: underkänt - godkänt. Se bifogade bedömningskriterier (sida 5).

Viktiga datum

Datum	Händelse
15/4	Uppgiften introduceras
15/4	Föreläsning från fackspråk (45 min). GD-salen 10-12
19/5	Kamratbedömning. Vi rekommenderar att den bedömande gruppen har minst två arbetsdagar på sig att läsa rapporten och att den skrivande gruppen har åtminstone en dag på sig för korrekationer. Detta gör ni upp med varandra.
23/5 kl 23.55	Slutinlämning via Ping-Pong.

Bedömningsformulär för inlämningsuppgift i Mekanik 2

Inlämningsuppgiften i Mekanik 2 behandlar dynamik hos stela kroppar i rummet. Mer specifikt görs en modell och datorsimulering av rotationsrörelsen hos en asteroid.

Visualisering och resultatshantering

Att arbeta medvetet med visualisering och textkommentar är en central dimension av teknisk kommunikation inom den övergripande strukturen för inledning, metod, resultat, analys, och diskussion (IMRAD). Läsares bedömning av figurer och tabeller samt medföljande textkommentarer sker i minst två steg. Vid en första genomläsning görs en väldigt snabb bedömning av relevans och trovärdighet. I ett senare skede omvärderas ibland den här tidiga bedömningen då texten och visualiseringen analyseras närmare. Den här inlämningsuppgiften, som fokuserar på resultatdelen i IMRAD, ger er ett tillfälle att träna på visualisering och kommentar och lägger grunden för kommande inslag i årskurs 2. I kommande skrivuppgifter i senare kurser tillkommer resterande delar av rapporteringsstrukturen.

I uppgiften för stelkroppsrotation i rummet kommer ni att träna på att visualisera samt kommentera resultat och hela processen för inlämningsuppgiften omfattar ett flertal steg. I de avslutande stegen kommer såväl vi som ni att ha det här bedömningsformuläret som stöd för utformning och bedömning. Ni gör den första bedömningen er emellan; därefter lämnas uppgiften in till Fackspråk och kursansvarig.

Kriterium	Väldigt bra	Godkänt	Kräver förbättring
Formalia	Visualiseringen är tydlig, lättläst och all nödvändig information är lättillgänglig. Figurtexten är komplett och ger all den information som krävs för ostörd läsning. Textkommentaren är enkel att lokalisera och den sammanfattande frasen fullständig.	Enheter, skalor, tecken- eller symbolförklaringar anges men är svårlästa. Figurtext finns men kan sakna viktig information för ostörd läsning. Hänvisning finns men är otydlig eller minimal. Likaså sammanfattningen är alltför kortfattad givet dess syfte.	Saknar skalor, enheter, tecken- eller symbolförklaringar, figurtext, hänvisning och/eller sammanfattning.
Utformning	Utformningen är effektiv och medveten och inget överflödigt grafiskt brus stör innehållet. Layout och grafik förstärker innehållet väl. Placering, omfattning, färgval och linjegravik underlättar läsning och betonar visualiseringens fokus	Utformningen är gjord med eftertanke och innehåller enskilda goda exempel men störs av brus eller otydlighet. Otydlighet kan gälla placering, brus, omfattning, färgkodning eller linjegravik.	Visualiseringen saknar tydligt syfte och är otydlig eller svårtydd pga onödig komplexitet, detaljrikedom eller bristande grafisk utformning. Visualiseringen svarar inte på frågan 'vad vill ni uppnå med figuren/tabellen?'
Textkommentar	Textkommentarens utformning innehåller såväl hänvisning, sammanfattning, preciserat fokus och kommentar av eventuella avvikelser samt diskussion av slutsatser	Textkommentaren innehåller hänvisning och sammanfattning men endast ett svepande fokus och nödvändiga tillägg till figuren.	Textkommentaren är ofullständig med avseende på hänvisning, sammanfattning, fokus eller kommentar
Fysikalisk modellering	Simuleringen av asteroidens rotationsrörelse uppfyller designspecifikationerna och illustreras tydligt i text och grafik. En precessionsrörelse kring långa axeln demonstreras tydligt.	Asteroidens rotationsrörelse har simulerats med två olika modeller (rotations-symmetrisk och asymmetrisk). Rörelsen har illustrerats med grafik och kommenterats i text, men den eftersökta precessionsrörelsen är inte helt uppenbar för läsaren.	Felaktiga eller otydliga resultat i simuleringen av asteroidens rotationsrörelse.
Begreppsförståelse och tydlighet	Konserverade dynamiska variabler diskuteras i text och illustreras med grafik. Deras fysikaliska ursprung utreds. I rapporten görs tydlig skillnad på skalära och vektoriella storheter, samt på observationer som görs i ett inertialt respektive ett kroppsfixt koordinatsystem	I rapporten diskuteras konserverade dynamiska variabler. Skalära och vektoriella storheter särskiljs liksom olika koordinatsystem.	Felaktiga eller otydliga slutsatser kring vilka dynamiska variabler som konserveras. Uppenbara misstag vad gäller vektoriella/skalära storheter och olika koordinatsystem.

Kamratbedömning för inlämningsuppgift i Mekanik 2

Varje grupps arbete skall läsas igenom och kommenteras av en annan grupp. Speciellt skall arbetet kommenteras utefter utdelade bedömningskriterier. Er förbättrade andraversion av texten lämnas in vid slutinlämningen, och förbättringar är framförallt baserade på den kamratbedömning ni fått. Notera att kamratbedömningen ska bifogas er slutinlämning. Använd följande mall, eller motsvarande.

Kommentarer till inlämningsuppgift av (namn, grupp):

Kommentarer av (namn, grupp):

Formalia

Utformning

Textkommentar

Fysikalisk modellering

Begreppsförståelse och tydlighet