Mekanik F, del 2 (FFM521)

Föreläsningsanteckningar av Christian Forssén

Kursbok:	Engineering Mechanics, Dynamics (7th ed), Meriam and Kraige
Föreläsare:	Christian Forssén
Kontaktinfo:	Rum F8006, Email: `christian.forssen@chalmers.se`

Uppdaterad: March 31, 2014

Instuderingsfrågor

Inledning

Denna text innehåller ett antal instuderingsfrågor som är tänkta att komplettera och guida läsningen av materialet i kursboken. Fundera igenom frågorna inför och efter läsningen av respektive avsnitt.

För varje avsnitt ges också något eller några representativa problem i form av *Veckans tal*. Dessa är typiska tentamensuppgifter och de illustrerar den typ av problem som man bör sikta på att kunna lösa. Lösningar på dessa uppgifter kommer att publiceras på kurshemsidan allteftersom.

Christian Forssén, Göteborg, π, 2014

5. Stelkroppskinematik i planet

Kap 5.1–3: Stelkroppskinematik, plan rörelse

Att fundera på:

- Vad skiljer en stel kropp från en partikel i kinematiskt hänseende (dvs vad gäller dess rörelse)?
- Vad innebär stelkroppsantagandet?
- Hur förenklar stelkroppsantagandet beskrivningen av rotationsrörelsen för alla punkter i den stela kroppen?

  Mer specifikt, vad blir hastigheten för en punkt A relativt en fix rotationsaxel?
- Hur kan man beskriva en rotationsrörelse med en vektor? – Vad betyder längden och riktningen på rotationsvektorn?
- Vad gäller speciellt för rotationsvektorn vid plan rörelse (rörelsen begränsad till planet, dvs två dimensioner)?

Kap 5.4–6 : Relativ hastighet och acceleration

Att fundera på:

- Repetera från partikelkinematik hur rörelsen för en partikel A kan beskrivas i termer av rörelsen för en annan partikel B samt relativ rörelse.
- Betrakta specialfallet då A och B är punkter som ligger på samma stela kropp. Vad gäller speciellt för deras relativa rörelse? Hur är den riktad och vad är dess storlek?
- Titta närmare på hjulet på en cykel som passerar förbi. Finns det någon punkt på hjulet som momentant står helt stilla?

  Hur förflyttar sig denna punkt?
- Hur ser den relativa *acceleration* för en punkt B relativt en annan punkt A på samma stela kropp ut?

  Kan man generellt säga något om riktningen på denna acceleration vid plan rörelse?

Kap 5.7 – Stelkroppskinematik, plan rörelse – Roterande koordinatsystem

Att fundera på:

- I detta avsnitt läggs grunden till vår användning av accelererande (icke-inertiala) koordinatsystem. Var noga med att försöka förstå centrala begrepp som *absolut rörelse* och *relativ rörelse* och att skilja på olika typer av koordinater.
- Varifrån uppstår de olika termerna som ingår i uttrycket för relativ hastighet när vår observatör i B befinner sig i ett roterande koordinatsystem?
- Varifrån uppstår de olika termerna som ingår i uttrycket för relativ acceleration när vår observatör i B befinner sig i ett roterande koordinatsystem?
- Newtons rörelseekvationer gäller enbart i ett inertial-system. Komplikationer uppstår därför när vi skall finna rörelseekvationer relativt ett accelererande koordinatsystem. Hur kan detta problem översättas i termer av *fiktiva krafter*?

Diskussionsfråga

I en episod av programmet 'Mythbusters' testar programledarna en filmmyt som säger att det är möjligt att skruva en pistolkurva runt ett hinder mellan skytt och måltavla genom att avfyra pistolen mitt i en snabb rotationsrörelse med skottarmen.

Vad tror du själv om denna myt (fundera helst innan du tittar på programmet)?

Hur hade man kunnat konstruera en situation så att det vore möjligt att utföra filmtricket (använd din kunskap om roterande koordinatsystem)? Var gärna kvantitativ.

Rekommenderade länkar:

- Mythbusters: Is it possible to curve a bullet?

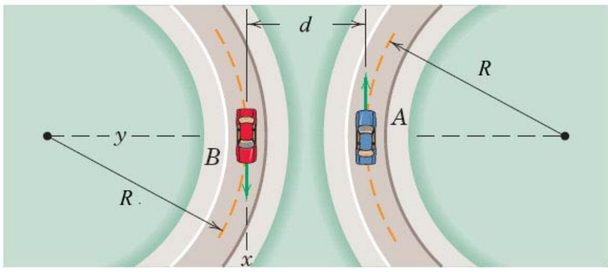
  `http://www.youtube.com/watch?v=p3MsILLzxXA (part 1)`
  `http://www.youtube.com/watch?v=EFMQSdJXyF4 (part 2)`

Veckans tal 1: Relativ rörelse

Bilarna A och B kör genom en kurva (krökningsradie R) med lika stor fart v.

(a) Bestäm *hastigheten* för bil A uppmätt av en observatör i bil B, vars koordinatsystem är kroppsfixt och därmed roterar med rörelsen, vid ögonblicket som visas i figuren (då avståndet mellan bilarna är d).

(b) Bestäm *accelerationen* för bil A uppmätt av en observatör i bil B vid ögonblicket som visas i figuren.



Veckans tal 2: Roterande koordinatsystem

Tyngdaccelerationen som uppmäts i ett jordfixt koordinatsystem betecknas med $\mathbf{g}$. Pga jordens rotation skiljer sig $\mathbf{g}$ från den *verkliga* gravitationsaccelerationen $\mathbf{g}_0$ som hade uppmätts om jorden inte hade roterat. Antag (något förenklat och felaktigt) att jorden är ett perfekt klot och räkna ut

(a) Skillnaden i storlek $g - g_0$ som en funktion av latituden ϕ;

(b) Den maximala vinkeln mellan $\mathbf{g}$ och $\mathbf{g}_0$ samt vid vilken latitud denna inträffar.

6. Stelkroppsdynamik i planet

Kap 6.1–3 – Stelkroppsdynamik, plan rörelse

Att fundera på:

- Stelkroppsdynamik handlar om stela kroppens rörelse (translation och rotation) som en konsekvens av externa krafter.

- Viktiga ingredienser att behärska är:
  (1) Friläggningsdiagram (statikdelen) och
  (2) Kinematiska uttryck för stelkroppsrörelse (förra kapitlet).

- Försök förstå sambandet mellan en stel kropps totala rörelsemängdsmoment och införandet av den kroppsspecifika egenskapen *tröghetsmoment*.

- Hur många rörelseekvationer har vi för en stel kropps allmänna rörelse i planet?

- Det finns två sätt att omformulera vridmomentsekvationen så att den gäller relativt en godtycklig, kroppsfix punkt P (dvs en punkt som inte nödvändigtvis sammanfaller med masscentrum). Det ena sättet är särskilt fördelaktigt om punkten P dessutom är absolut fixerad, t.ex. genom att kroppen roterar kring denna punkt. Varför?

Kap 6.4–5 – Stelkroppsdynamik, rotation kring fix axel och allmän plan rörelse

Att fundera på:

- Hur många (skalära) rörelseekvationer ges för allmän plan rörelse (translation + rotation)?

- När kan man använda Steiners sats för att räkna ut ett tröghetsmoment?

Råd vid problemlösning

- Val av koordinatsystem: Välj koordinatsystem beroende av rörelsen och geometrin.

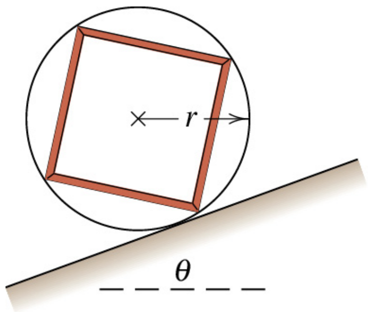
- Val av vridmomentsekvation: Notera att vridmomentet och rörelsemängdsmomentet inte nödvändigtvis är enklast att beräkna m.a.p. masscentrum.

- Tvångsvillkor: Eventuella tvångsvillkor leder till kinematiska samband.

- Antal ekvationer: Vi kan som mest ha fem ekvationer (tre rörelseekvationer samt, med tvångsvillkor, två kinematiska samband från relativ acceleration)
- Kom dessutom ihåg att vara noggranna med **definition av kropp att frilägga** och att vara **konsekvent med antaganden och definitioner**.

Veckans tal 3: Stelkroppsrörelse i planet: Rotation och translation

Fyra identiska tunna stavar (vardera med massan m) sitter ihopsvetsade till en kvadrat enligt figur. Kvadratens hörn är i sin tur ihopsvetsade med en lätt ring med radien r enligt figur. Denna stela kropp får sedan rulla nedför en sluttning med lutning θ. Bestäm det minsta möjliga värdet på den statiska friktionskoefficienten som förhindrar glidning.



Kap 6.6, 6.8 – Stelkroppsdynamik: arbete, energi, rörelsemängd, rörelsemängdsmoment

Att fundera på:

- Här kommer vi att (ny)introducera gamla bekanta begrepp som arbete, energi, rörelsemängd och rörelsemängdsmoment; men denna gång beaktande stela kroppars rörelse
- Den stora nyheten är förstås rotationsrörelsen och vad den innebär för ovanstående storheter.
- Vi kan notera att för en stel kropp kan det finnas olika punkter med avseende på vilka man väljer att beräkna rörelsemängdsmoment. Masscentrum är ofta en sådan punkt, medan rotation kring en fix axel oftast innebär en annan.
- Den kroppsspecifika storheten tröghetsmoment beror givetvis på vilken kroppsfix punkt som man utgår ifrån.
  $\bar{I}$ betecknar tröghetsmoment map masscentrum medan I_O är tröghetsmomentet map en fix punkt O.
- I detta kapitel betraktar vi plan rörelse vilket innebär att storheter som rotationsvektor, vridmoment och tröghetsmoment alltid är riktade vinkelrät mot planet. I detta fall kan vi använda *skalära* storheter för att beskriva dessa. I det allmänna tredimensionella fallet måste vi givetvis utnyttja vektorer.

Veckans tal 4: Arbete-energiprincipen

Ett homogent klot med radie R rullar (utan glidning) med farten V_0. Klotet träffar rakt på ett vertikalt trappsteg, med höjden h, och rullar upp över det. Antag att den punkt på klotet som träffar överkanten av trappsteget också sitter fast där under en kort stund (fram till att klotets masscentrum befinner sig rakt ovanför trappstegskanten). Härled ett uttryck för den minsta hastighet som klotet måste ha för att komma över trappsteget.

7. Stelkroppsrörelse i rummet

Kap 7.1–6 – Allmän stelkroppsrörelse i rummet. Kinematik

Att fundera på:

- Det faktum att en rotation beskrivs med en *rotationsvektor* blir betydligt viktigare när vi inte längre har begränsat oss till rotationer i en given riktning. Dvs rotationer kan inte längre beskrivas som en skalär storhet.
- Om vi begränsar oss till rotationer kring en fix axel gäller i princip allt vi har använt när vi har betraktat plan rörelse. Rörelsen för punkter i kroppen uppfyller $\vec{v}, \vec{a} \perp \vec{\omega}, \vec{\alpha}$.
  Skillnaden mot plan rörelse är att kroppens form kan variera längs rotationsaxeln vilket leder till en mer allmän definition av "tröghetsmoment".
- För rotation kring en fix punkt har vi plötsligt möjlighet att ändra rotationsvektorns riktning. Rotationsvektorns rörelse kallas för *precession*.
- Ett specialfall är då ω =konstant. Då gäller att rotationsvektorns precession Ω ges av sambandet $\vec{\alpha} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}$.
- Notera att rotationer inte är kommutativa. Att rotera en stel kropp en vinkel θ_1 runt en axel och sedan θ_2 runt en annan axel är *inte* detsamma som att utföra rotationerna i motsatt ordning: $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$.
- Rotationsvektorer kan däremot adderas som vanliga vektorer.
- Allmän stelkroppsrörelse analyseras lättast med relativ rörelse. Ofta utnyttjar vi roterande referensaxlar.

Kap 7.7–10 – Allmän stelkroppsrörelse i rummet. Dynamik

Att fundera på:

- Rörelseekvationerna för allmän stelkroppsrörelse i rummet är t.ex.

  $$\sum \vec{F} = \dot{\vec{P}}$$
  $$\sum \vec{M} = \dot{\vec{L}},$$

  uttryckt i ett rumsfixt koordinatsystem. Man kan välja alternativa vridmomentsekvationer och framförallt kan man skriva om dem i ett kroppsfixt koordinatsystem (för att kunna utnyttja kroppens tröghetsmatris, se nedan).

- Rörelsemängdsmoment: I tre dimensioner och med ett kroppsfixt koordinatsystem gäller $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$, där $\mathbf{I}$ är en symmetrisk matris som kallas tröghetsmatrisen.

- Från ovanstående finner vi att rörelsmängdsmomentet i allmänhet *inte* är parallellt med rotationsvektorn.

- Det finns val av kroppsfixa axlar så att alla deviationsmoment i $\mathbf{I}$ är noll. Dessa axlar kallas huvudtröghetsaxlar och I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} kallas huvudtröghetsmoment.

- Kinetisk energi kan uttryckas som bestående av translation av masscentrum plus rotation kring densamma. Alternativt kan den skrivas som rotation kring en fix punkt.

- Begränsar vi oss till rörelse i parallella plan så kan vi välja $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z \neq 0$. Vi får vridmomentsekvationerna

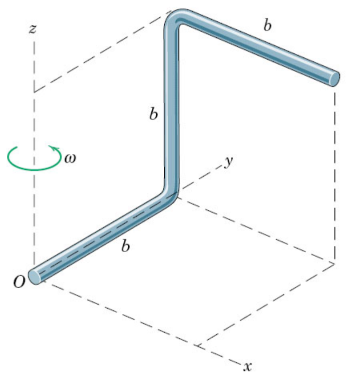
$$\begin{aligned}
\sum M_x &= -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 \\
\sum M_y &= -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 \\
\sum M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z.
\end{aligned}$$

Veckans tal 5: Stelkroppsrörelse i rummet: Dynamiska variabler

Den böjda staven med homogen linjedensitet ρ roterar runt z-axeln med konstant rotationshastighet ω.

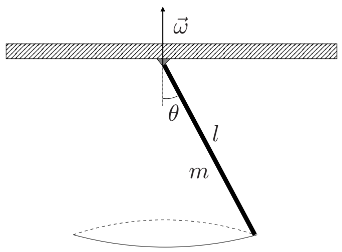
(a) Bestäm stavens rörelsemängdsmoment m.a.p. punkten O, uttryckt i det *kroppsfixa* koordinatsystemet $x - y - z$.

(b) Bestäm stavens kinetiska energi.



Veckans tal 6: Stelkroppsrörelse i rummet: Rotation kring fix axel

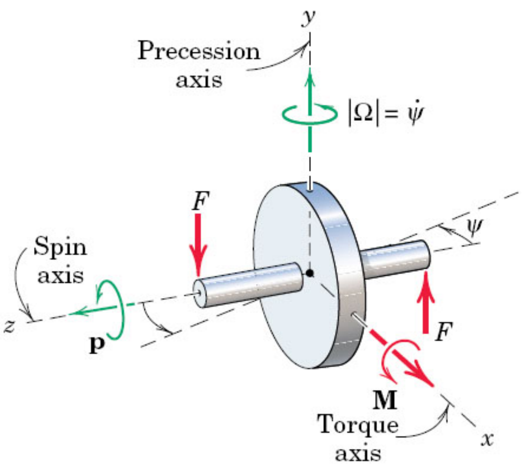
Betrakta en homogen stav med längden l och massan m. Staven är upphängd i sin övre ände, kring vilken den kan rotera fritt (se figur). Staven har satts i rotation så att dess undre ände utför en cirkelrörelse i horisontalplanet (dvs staven rör sig med konstant vinkel θ relativt vertikalaxeln). Finn vinkelfrekvensen ω för denna rotationsrörelse.



Kap 7.11 – Gyroskoprörelse

Att fundera på:

- Detta är den mest icke-intuitiva delen av hela kursen – ja antagligen av samtliga era fysikstudier fram till nu.
- Nyckeln till att förstå gyroskoprörelse är att en spinnande kropps rörelsemängdsmoment kommer att följa ett eventuellt pålagt vridmoment. Detta leder till att den spinnande kroppen beter sig på minst sagt oväntade sätt.
- Spinnvektorns rörelse kallas för precessionsrörelse. Denna kommer vi att finna är proportionell mot storleken på det pålagda vridmomentet och omvänt proportionell mot spinnrörelsens rörelsemängdsmoment.
- Något förvånande kan vi i vissa fall ha en precessionsrörelse även då vi ej har något yttre vridmoment. Men då gäller ett annat samband mellan spinn- och precessionshastighet. Ett exempel är jordklotets precessionsrörelse.
- Spinnande objekt har en stabiliserande effekt. Det är lätt att cykla när man väl vågar få upp farten.
- Gyroskop har även diverse praktiska tillämpningar. Stabiliseringshjul på passagerarfärjor, autopilot, gyrokompass.

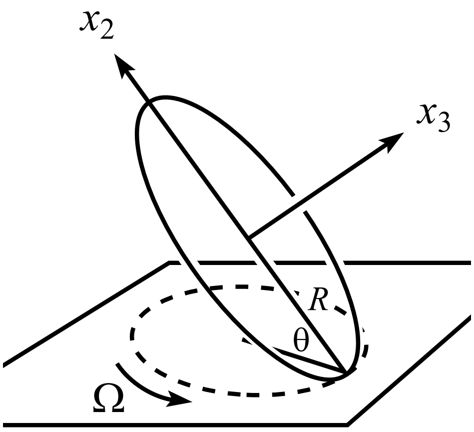


Veckans tal 7: Gyroskoprörelse (överbetygsdel)

Ett mynt som spinner kring en vertikal axel kommer snart att förlora energi och börja wobbla på bordsytan (se figur). Vinkeln θ kommer gradvis att minska tills myntet slutligen faller. Antag att denna process är långsam och betrakta en period då vinkeln θ är konstant. Vi kan också anta att masscentrum är stillastående. Myntets radie är R. Myntet rullar utan att glida och kontaktpunkten rör sig med frekvensen Ω runt bordsytan.

(a) Vad är myntets vinkelhastighet uttryckt i det kroppsfixa $x_1x_2x_3$-systemet?

(b) Hur stor är periodtiden för kontaktpunktens cirkelrörelse och vad händer då vinkeln θ går mot noll?



8. Svängningsrörelse

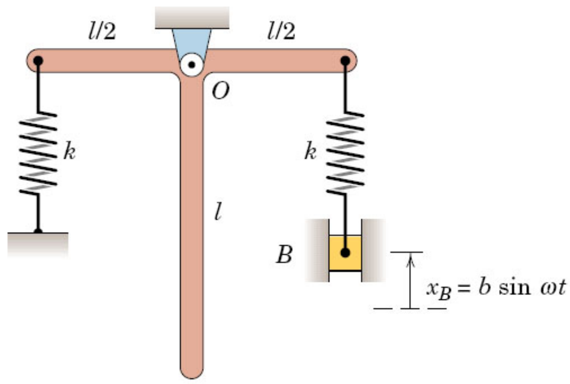
Kap 8.1–2, 8.4 – Svängningsrörelse (fria svängningar), stelkroppssvängning

Att fundera på:

- En specialklass av dynamikproblem är så kallade harmoniska svängningar.
- Rörelseekvationen fås genom att rita ett friläggningsdiagram för ett godtyckligt valt positivt värde på rörelsevariabeln följt av applikation av Newtons andra lag.
- Detta leder till en andra ordningens, linjär differentialekvation. Repetera gärna dina kunskaper hur man löser en sådan.
- Vilken betydelse har ett systems naturliga vinkelfrekvens?
- Hur kan man modellera en dämpande kraft och vilken effekt har denna på den oscillerande rörelsen?
- För stelkroppssvängningar är rörelsevariabeln ofta en vinkel och rörelseekvationen fås ur vridmomentsekvationen. Det svängande systemets tröghet, som tidigare har varit den oscillerande partikelns massa, motsvaras i detta fall av ett tröghetsmoment.
- För en analytisk lösning av stelkroppssvängningar så får vi ofta begränsa oss till små svängningar så att rörelseekvationen kan lineariseras.

Veckans tal 8: Svängningsrörelse

Två identiska stavar med längd l är ihopsvetsade i en rät vinkel enligt figur. Den totala massan för de två stavarna är m och arrangemanget kan svänga fritt kring en horisontell axel genom punkten O. Blocket B drivs av en extern kraft. Bestäm den kritiska svängningsfrekvens ω_c som resulterar i en kraftig oscillation för stavarrangemanget.



- Fundera på vilka/vilken rörelseekvation som vi behöver?
- Vilken typ av rörelse uträttar den stela kroppen?
- Vi är intresserade av små svängningar och kommer följdaktligen att linearisera rörelseekvationen för små vinklar. Vilken typ av svängningsrörelse är det som beskrivs av denna lineariserade rörelseekvation?

Kap 8.3 – Svängningsrörelse (drivna svängningar)

Att fundera på:

- I detta avsnitt betraktas en speciell och viktig klass av vibrationer, nämligen där svängningsrörelsen drivs av en yttre kraft $F(t)$.
- Repetera gärna dina kunskaper i lösningen av andra ordningens differentialekvationer.
- Lösningarna till den differentialekvation som beskriver rörelsen består av två delar: (1) homogenlösning och (2) partikulärlösning. Vad beskrivs av respektive del?
- Hur definierar vi att systemet befinner sig i resonans och när uppkommer detta tillstånd?
- Vi kommer att finna den allmänna differentialekvationen för svängningsrörelse

  $$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t,$$

  med både dämpning och en drivande extern kraft. Denna ekvation kan beskriva flera olika typer av oscillerande system med en frihetsgrad.

  x = Rörelsevariabel (inte nödvändigtvis en längdkoordinat)
  m, c, k = Parametrar som beskriver systemet (tröghet, dämpning, respons)
  F_0 = Amplitud på någon drivande störning.

  Att finna den rörelseekvation (och de approximationer) som ger ovanstående typ av differentialekvation är ofta själva utmaningen. Lösningarna är sedan generiska.

Rekommenderade länkar:

- Tacoma bridge

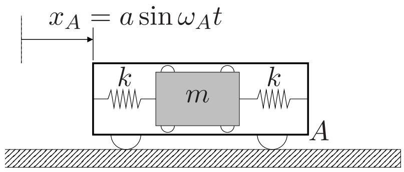
  `http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs`

Veckans tal 9: Driven svängingsrörelse # 1

En person går med konstant fart rakt österut på en vändskiva som roterar moturs med konstant vinkelhastighet ω. Finn ett uttryck för personens lägeskoordinater relativt marken.

Veckans tal 10: Driven svängingsrörelse # 2

Rörelsen hos den yttre vagnen A i figuren ges av $x_A(t) = a \sin \omega_A t$. För vilka frekvenser ω_A kommer amplituden för massan m:s svängningsrörelse relativt vagnen A att vara mindre än $c\,a$, där c är ett positivt reellt tal $c > 1$?



A. Analytisk mekanik

Analytisk mekanik, kap 1–4 - An Introduction to Analytical Mechanics (March 2010), M. Cederwall and P. Salomonson

Att fundera på:

- I Newtonsk mekanik beskrivs rörelsen för en partikel under inverkan av en kraft av
$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F},$$
Denna *rörelseekvation* kan inte härledas – den är ett postulat!

- Vi har också stött på denna ekvation i olika förklädnader:
  - Uttryckt i olika mer eller mindre besvärliga koordinatsystem
  - Arbete-energi principen
  - Impuls-rörelsemängd
  - Impulsmoment-rörelsemängdsmoment

- Vi skall nu introducera en alternativ formulering av den klassiska mekaniken – den sk analytiska mekaniken. Vi kommer att formulera Lagranges ekvationer – som nästan på ett magiskt sätt ger rörelseekvationerna för ett system oberoende av val av koordinater.

- Denna första föreläsningen kommer att ägnas åt att plocka ihop den verktygslåda som behövs för att formulera Lagranges ekvationer. Vi kommer att introducera några nya begrepp:
  - Generaliserade koordinater
  - Generaliserade hastigheter
  - Generaliserade krafter
  - Generaliserad rörelsemängd

Analytisk mekanik, kap 5–6 - An Introduction to Analytical Mechanics (March 2010), M. Cederwall and P. Salomonson

Att fundera på:

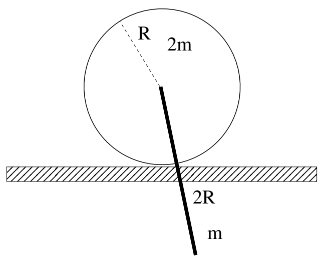
- Lagranges ekvationer kan betraktas
  - ... som en följd av Newtons andra lag
  - ... som en konsekvens av Verkansprincipen
- Arbetsgången vid problemlösning med Lagranges ekvationer är följande:
  1. Bestäm antalet frihetsgrader och välj en lämplig uppsättning generaliserade koordinater $q^1, q^2, \dots, q^N$.
  2. Teckna uttryck för kinetisk samt potentiell energi i termer av q och $\dot{q}$. Notera att rörelseenergin skall ges relativt ett *inertialsystem*!
  3. Bilda Lagrangianen $L = T - V$.
  4. Sätt upp och lös Lagranges ekvationer

     $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

     vilket allmänt kommer att involvera N st kopplade andra-ordningens differentialekvationer.
- Lagranges ekvationer kommer att visas vara en konsekvens av ett mer fundamentalt postulat: **Verkansprincipen**. Denna säger att ett systems dynamik $q(t)$ karakteriseras av en stationärpunkt hos verkan $S[q(t)]$.
- Funktionalbegreppet och variationskalkyl är två viktiga matematiska redskap som kommer att användas.

Veckans tal 11: Analytisk mekanik (överbetygsdel)

En homogen cylinder med massan $2m$ samt radien R ligger på en horisontell bordsskiva så att ena ändytan precis sticker ut. I centrum på denna cirkulära ändyta sitter en homogen smal stav (massa m och längd $2R$) fritt ledad i sin ena ände. Den är alltså upphängd så att den kan pendla i ett vertikalplan vinkelrätt mot cylinderaxeln (se figur). Bestäm periodtiden för denna pendelrörelse (små svängningar) under antagandet att cylindern rullar utan att glida.



Veckans tal 12: Analytisk mekanik (överbetygsdel)

En viktig princip inom fysiken är att symmetrier (dvs invarians under specifika transformationer – rotation, tidsförflyttning etc) är direkt relaterade till konserveringslagar (rörelsevariabler som inte ändras). Nedanstående är ett exempel på detta och hur man kan visa det med Lagranges formalism.

Betrakta storheten

$$E \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L,$$

där $L = L(q, \dot{q}, t)$ är Lagrangianen för ett system med N frihetsgrader och q_i, $\dot{q}_i$ är generaliserade koordinater och hastigheter.

(a) Ovanstående storhet motsvarar (i de flesta fall) ett systems totala mekaniska energi. Visa explicit att detta påstående är sant för en partikel i rummet som beskrivs med cartesiska koordinater xyz och en allmän potentiell energi $V(x, y, z)$.

(b) Visa nu att Lagranges ekvationer ger att E (enligt definitionen ovan) är en konserverad storhet om Lagrangianen ej har något explicit tidsberoende (dvs $\partial L/\partial t = 0$).

Svar på Veckans tal

1. (a) $\vec{v}_{A\mathrm{rel}} = \vec{v}_A - \vec{\omega} \times \vec{r}_A = -(2v + v\frac{d}{R})\hat{x}$.

   (b) $\vec{a}_{A\mathrm{rel}} = \vec{a}_A - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{A\mathrm{rel}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A) = -(2\frac{v^2}{R} + \frac{v^2 d}{R^2})\hat{y}$.

2. (a) $\frac{g}{g_0} = 1 - x\cos^2\phi + O(x^2)$. I uppgiften eftersöktes $g - g_0 \approx -g_0 x \cos^2\phi$.

   (b) Vid latituden 45° blir detta $\theta_{\max} \approx x/2 + O(x^2)$ ($\approx 0.015°$).

3. $\mu_s \geq \frac{F_f}{N} = \frac{2}{5}\tan\theta$

4. $V_0 \geq \sqrt{\frac{10gh}{7}}\left(1 - \frac{5h}{7R}\right)^{-1}$

5. (a) $\vec{L}_O = \rho b^3 \omega \left(-\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{3}{2}\hat{y} + \frac{8}{3}\hat{z}\right)$.

   (b) $T = \frac{4}{3}\rho b^3 \omega^2$,

6. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}$

7. (a) $\vec{\omega} = \Omega \sin\theta \hat{x}_2$.

   (b) $T = \pi\sqrt{\frac{R\sin\theta}{g}}$. Vi noterar att periodtiden går mot noll då $\theta \to 0$, dvs myntet wobblar allt snabbare.

8. $\omega_c = \omega_{\mathrm{resonans}} = \sqrt{\frac{6}{5}\left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right)}$

9. $(x, y) = (A\cos(\omega t + \phi), a\sin(\omega t + \phi) + v/\omega)$, vilket beskriver en cirkel med centrum i punkten $(0, v/\omega)$. Konstanterna A, ϕ ges av begynnelsevillkoren (x_0, y_0).

10. $\frac{\omega_A}{\omega_n} < \sqrt{\frac{c}{1+c}}$ eller $\frac{\omega_A}{\omega_n} > \sqrt{\frac{c}{c-1}}$.

11. $T = 2\pi\sqrt{\frac{13R}{12g}}$

12. (a) Definitionen i uppgiften ger $E = T + V$.

    (b) Mha Lagranges ekvationer kan man visa att $\frac{dE}{dT} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.