Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521 och FFM520
Tisdagen 26 augusti 2014, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall

Obligatorisk del

---

1. Beräkna först masscentrums läge. Kalla dess avstånd från centrum för bollen med radie R för ℓ. Bollarnas respektive massor är $M = \frac{4\pi}{3}R^3K$ respektive $m = \frac{4\pi}{3}r^3K$. Masscentrum befinner sig på

$$\ell = \frac{(R+r)r^3k}{R^3K + r^3k}\,.$$

Välj axlar genom masscentrum så att z-axeln går genom bollarnas mittpunkter. Det garanterar av symmetriskäl att tröghetsmatrisen är diagonal. Tröghetsmomentet för en homogen boll m.a.p. en axel genom masscentrum är "$\frac{2}{5}mr^2$", så

$$I_{zz} = \frac{8\pi}{15}(R^5K + r^5k)\,.$$

För att beräkna de andra två huvudtröghetsmomenten (som är lika), lägger man till $M\ell^2$ och $m(R+r-\ell)^2$ och får

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{8\pi}{15}(R^5K + r^5k) + \frac{4\pi}{3}\frac{(R+r)^2R^3Kr^3k}{R^3K + r^3k}\,.$$

Dimensionskontroll.

2. Corioliskraften är $-2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$. För något som färdas österut längs ekvatorn är den alltså riktad rakt uppåt och har beloppet $2\omega v_{rel}$.

Det kan ses som rimligt: att färdas österut är som att rotera med en något större vinkelhastighet än jordens, nämligen $\omega' = \omega + \frac{v_{rel}}{R}$. Centrifugalkraften vid denna snabbare rotation är

$$mR(\omega + \frac{v_{rel}}{R})^2 = m(R\omega^2 + 2\omega v_{rel} + \frac{v_{rel}^2}{R})\,.$$

Den andra termen är just denna Corioliskraft (den sista är centrifugalkraften i det roterande systemet).

Den andra termen är mycket mindre än den första om

$$\frac{v_{rel}}{R\omega} \ll 1\,.$$

Eftersom $R\omega \approx \frac{40.000}{24}$ km/h lär det vara så.

Om tåget istället färdas norrut är den relativa hastigheten parallell med rotationsvektorn, och Corioliskraften är noll.

3. Enligt uppgiften kan partikelns rörelse beskrivas av differentialekvationen

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t\,.$$

Det är bara amplituden hos partikulärlösningen som efterfrågas. För enklare dimensionsanalys är det lämpligt att införa vinkelfrekvensen ω_0 enligt $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ och den dimensionslösa konstanten γ enligt $\gamma\omega_0 = \frac{c}{m}$. Ansätt en partikulärlösning

$$x_p(t) = B\sin\omega t + C\cos\omega t\,.$$

Insättning i differentialekvationen ger för sinus- och cosinustermerna:

$$\begin{aligned}
&-B\omega^2 - C\gamma\omega_0\omega + B\omega_0^2 = \frac{F_0}{m}\,,\\
&-C\omega^2 + B\gamma\omega_0\omega + C\omega_0^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Lösningen är

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{F_0}{m}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega_0\omega)^2}\,,\\
C &= -\frac{F_0}{m}\frac{\gamma\omega_0\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega_0\omega)^2}\,,
\end{aligned}$$

och amplituden A ges av

$$A^2 = B^2 + C^2 = \frac{F_0^2}{m^2}\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega_0\omega)^2}\,.$$

För att bestämma vid vilken frekvens den blir som störst söker vi minimera nämnaren. Den är ett andragradspolynom i ω^2, med ett minimum (som bara ett relevant om det ligger på $\omega^2 > 0$. Derivering ger:

$$\frac{d}{d(\omega^2)}[(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega_0\omega)^2] = 2(\omega^2-\omega_0^2)+\gamma^2\omega_0^2\,.$$

Amplituden blir maximal då

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}\big(1-\frac{c^2}{2km}\big)}\,.$$

Detta gäller då $\gamma < \sqrt{2}$. Vid starkare dämpning blir amplituden större ju lägre frekvensen är.

4. Problemet kan lösas med hjälp av energi. Masscentrum rör sig på en cirkel med radien $\frac{\ell}{2}$, och dess fart är $\frac{1}{2}\ell\dot\theta$. Den potentiella energin blir

$$V = -\frac{1}{2}mgl\cos\theta\,.$$

Den kinetiska energin fås genom addition av energierna för masscentrums translation och rotationen kring masscentrum:

$$T = \frac{1}{2}m(\frac{1}{2}\ell\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot\theta^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot\theta^2\,.$$

Energikonservering ger, om staven momentant är i vila i $\theta = \theta_0$,

$$\frac{1}{6}m\ell^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = -\frac{1}{2}mgl\cos\theta_0\,,$$

så vinkelhastigheten vid vinkeln θ ges av

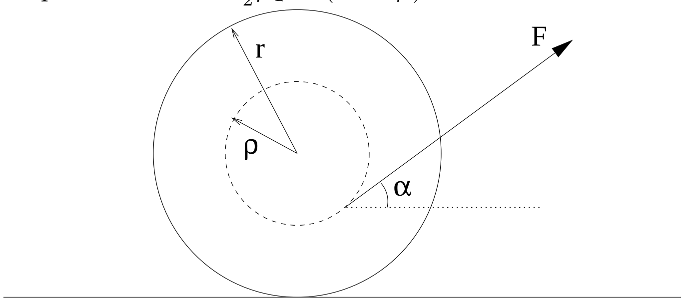
$$\dot\theta^2 = \frac{3g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)\,.$$

Om $\theta \ll 1$ är $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, så vinkelfrekvensen för små svängningar blir

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}\,.$$

Extrauppgift (enbart FFM520)

5. Det enklaste sättet att lösa uppgiften är att betrakta rörelsen (momentant) som rotation runt kontaktpunkten med planet. Då ser man att om en tänkt förlängning av tråden skär planet till vänster om kontaktpunkten kommer trådrullen att börja rulla åt höger (så ser figuren ut att vara ritad). Om skärningspunkten däremot ligger till vänster kommer momentet att vara riktat åt andra hållet, och trådrullen rullar åt vänster. Om vi räknar det förstnämnda fallet som positiv riktning, ger litet geometri i figuren vid handen att kraftens vinkelräta hävarm kring kontaktpunkten är $d = r\cos\alpha - \varrho$. Trådrullens tröghetsmoment runt kontaktpunkten blir $I = \frac{1}{2}\mu\varrho^2 + (2m+\mu)r^2$. Vinkelaccelerationen ges av $I\dot{\omega} = Fd$.



Överbetygsuppgifter

6. Eftersom kroppen rullar under planet är kontaktpunkten momentant i vila, och den totala rotationsvektorn $\vec{\omega}$ är horisontell. Därför är $\omega = \nu\cos\alpha$, $\Omega = \nu\sin\alpha$, där ν är spinnet, Ω precessionen och α vinkeln mellan pinnen och planet, som ges av $\tan\alpha = \frac{r}{\ell}$. I ett kroppsfixt system är huvudtröghetsmomentet runt symmetriaxeln $I_\zeta = \frac{1}{2}mr^2$ och runt vinkelräta axlar $I_\perp = \frac{1}{4}mr^2 + m\ell^2$. För att ta reda på rörelsemängdmomentet och dess förändring i tiden kan man gå tillväga på olika sätt. Eftersom vi har noterat att $\vec{\omega}$ är horisontell, har storleken $\Omega\cot\alpha$ och roterar med precessionshastigheten Ω, kan det vara en idé att räkna ut rörelsemängdsmomentet i ett system där en x-axel är riktad rakt åt höger, liksom $\vec{\omega}$. Vi behöver nämligen bara veta komponenten I_{xx} av tröghetsmatrisen, då $\vec{\omega} = \omega\hat{x}$ och då L_x är den enda komponenten av rörelsemängdsmomentet som roteras av precessionen. Genom att transformera den diagonala tröghetsmatrisen med en ortogonal matris som roterar en vinkel α fås $I_{xx} = I_\zeta\cos^2\alpha + I_\perp\sin^2\alpha$. Då är $L_x = \Omega\cot\alpha(I_\zeta\cos^2\alpha + I_\perp\sin^2\alpha)$, och

$$|\dot{\vec{L}}| = \Omega^2\cot\alpha(I_\zeta\cos^2\alpha + I_\perp\sin^2\alpha)\,.$$

Detta skall åstadkommas av momentet från tyngdkraften, som är $mg\ell\cos\alpha$ (positivt) tillsammans med ett negativt moment från kontaktkraften i planet. Därför måste det gälla att

$$\Omega^2 \geq \frac{mg\ell\sin\alpha}{I_\zeta\cos^2\alpha + I_\perp\sin^2\alpha} = \ldots = \frac{2g}{3\ell}\frac{\sqrt{1+\frac{r^2}{\ell^2}}}{1+\frac{r^2}{6\ell^2}}\,.$$

7. Systemet har två frihetsgrader, som kan beskrivas med ϱ och φ. Då partikeln rör sig på ytan är $\dot{z} = \dot{\varrho} f'$, Den potentiella energin är $V = mgf$ och den kinetiska $T = \frac{1}{2}m\left[(1+f'^2)\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2\right]$. Lagrangefunktionen ges av

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left[(1+f'^2)\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2\right] - mgf\,.$$

Lagranges ekvationer för ϱ respektive φ fås på vanligt vis:

$$\begin{aligned} 0 &= (1+f'^2)\ddot{\varrho} + f'f''\dot{\varrho}^2 + gf'\,, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\varrho^2\dot{\varphi})\,. \end{aligned}$$

I den andra ekvationen ser vi att $\ell = \varrho^2\dot{\varphi}$ är bevarad (rörelsemängdskonservering). Detta kan om man vill sättas in i den första ekvationen för att få en “centrifugalpotentialterm” $-\frac{\ell^2}{\varrho^3}$.

I specialfallet med konisk yta, $f(\varrho) = k\varrho$, har man $f' = k$, $f'' = 0$, och ekvationen i ϱ-led blir

$$0 = (1+k^2)\ddot{\varrho} - \frac{\ell^2}{\varrho^3} + kg\,,$$

som ser ut som rörelse med en konstant centralkraft och omskalad massa.