Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Torsdagen 27 augusti 2015
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Låt partikeln ha koordinaterna (ξ, η) i ett system som är fixt på jordytan, där $\hat{\xi}$ pekar österut och $\hat{\eta}$ norrut. Låt θ vara latituden. Den relativa hastigheten är $\vec{v}_{rel} = \dot{\xi}\hat{\xi} + \dot{\eta}\hat{\eta}$. Corioliskraften är $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}$, där $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ är jordens rotationsvektor. När man utför kryssprodukten får man

$$\begin{aligned} \hat{z} \times \hat{\xi} &= \hat{\eta}\sin\theta + \hat{\zeta}\cos\theta\,, \\ \hat{z} \times \hat{\eta} &= -\hat{\xi}\sin\theta \end{aligned}$$

(här är $\hat{\zeta} = \hat{\xi} \times \hat{\eta}$ den lokala vertikalen). Corioliskraften blir alltså

$$\vec{F}_{cor} = -2m\Omega\sin\theta\hat{\zeta} \times \vec{v}_{rel} + (\ldots)\hat{\zeta}\,.$$

Kraften i vertikalled är oväsentlig om partikeln bara kan röra sig på ytan. Man får en kraft som ändrar riktning med inte belopp på hastigheten, och om Ω inte ändras väsentligt under rörelsen blir det en cirkel. Om cirkelns radie är r gäller $\frac{mv^2}{r} = 2m\Omega|\sin\theta|$. Radien för rörelsen är

$$r = \frac{v}{2\Omega|\sin\theta|}\,,$$

och periodtiden

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{\pi}{\Omega|\sin\theta|}\,.$$

2. Om rörelsen hade varit odämpad med amplitud A hade hastigheten som högst varit $A\omega_n$, där $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$. Reynoldstalet kan då uppskattas som

$$Re \approx \frac{\rho d A\omega_n}{\eta}\,,$$

och strömningen är laminär om

$$A < \frac{30\eta}{\rho d}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 4 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}\,.$$

När detta gäller är vattenmotståndskraften $F_b = -bv$, där $b \approx 6\pi\eta r$. Den dimensionslösa dämpningsparametern ζ ges av $\frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n$, dvs.

$$\zeta = \frac{b}{2m\omega_n} = \frac{3\pi\eta r}{\sqrt{mk}} \approx 1.6 \times 10^{-3} \ll 1\,.$$

Svängningarna är svagt dämpade. (Dimensionskontroll bör göras.)

3. Under stöten, då rörelsen övergår från translation till rotation, är rörelsemängdsmomentet kring hörnet bevarat (kontaktkraften verkar i den punkten, och gravitationskraften har ett försumbart impulsmoment under den korta tiden). Kroppens tröghetsmoment runt hörnet är $I = \frac{1}{3}m(\ell^2 + h^2)$. Rotationshastigheten ω omedelbart efter stöten ges då av

$$mv \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{3}m(\ell^2 + h^2)\omega\,,$$

dvs. $\omega = \frac{3hv}{2(\ell^2+h^2)}$. Under den fortsatta rotationen är energin bevarad. För att kroppen skall tippa över krävs att masscentrum skall nå höjden $\frac{1}{2}\sqrt{\ell^2+h^2} - \frac{1}{2}h$. Det är möjligt om

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(\ell^2+h^2)\omega^2 \geq mg\frac{1}{2}\sqrt{\ell^2+h^2} - \frac{1}{2}h$$

Insättning av ω ovan ger

$$v^2 \geq \frac{4gh}{3}\left(1+\frac{\ell^2}{h^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{\ell^2}{h^2}}-1\right).$$

Lämpliga rimlighetskontroller: Då $\frac{\ell}{h} \gg 1$ krävs en mycket stor fart (i termer av $\sqrt{gh}$). Då $\frac{\ell}{h} \ll 1$ krävs en mycket liten fart.

4. En impuls p vinkelrätt mot slagträt i den punkt som anges i texten ger ett impulsmoment $p(d-\bar{r})$ runt masscentrum. Om inga andra krafter verkar, få masscentrums hastighet $\bar{v}$ och rotationshastigheten ω omedelbart efter stöten enligt

$$\begin{aligned} m\bar{v} &= p\,, \\ \bar{I}\omega &= p(d-\bar{r})\,. \end{aligned}$$

Eliminering av p ger $\bar{I}\omega = m\bar{v}(d-\bar{r})$. Om detta skall ge ren rotation runt ändpunkten skall det gälla att $\bar{v} = \omega\bar{r}$, och alltså $\bar{I} = m\bar{r}(d-\bar{r})$, dvs. $d = \bar{r} + \frac{\bar{I}}{m\bar{r}}$. (Detta kan också skrivas $d = \frac{I}{m\bar{r}}$, där $I = \bar{I} + m\bar{r}^2$ är trögehtsmomentet m.a.p. änden.) För en homogen stav med längden ℓ fås $d = \frac{2\ell}{3}$.

5. Låt cirkelns orientering ges av vinkeln ϕ och partikelns läge på cirkeln av ψ enligt figuren. Partikelns fart v ges av $v^2 = a^2\dot{\psi}^2 + d^2\dot{\phi}^2 + 2ad\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\frac{\psi}{2}$, där $d = 2a\cos\frac{\psi}{2}$ är partikelns avstånd till den fixa punkten. Cirkelns tröghetsmoment är $2Ma^2$.

Lagrangianen blir

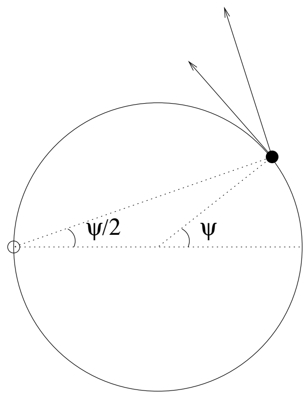
$$L = a^2\left[(M+2m\cos^2\frac{\psi}{2})\dot{\phi}^2 + 2m\cos^2\frac{\psi}{2}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{1}{2}m\dot{\psi}^2\,.\right]$$

Lagranges ekvationer fås som vanligt, och blir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left[2(M+2m\cos^2\frac{\psi}{2})\dot{\phi} + 2m\cos^2\frac{\psi}{2}\dot{\psi}\right]\,, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + 2\cos^2\frac{\psi}{2}\dot{\phi}) + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}(2\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi})\,. \end{aligned}$$

Den första av ekvationerna ger en bevarad storhet, som är rörelsemängdsmomentet kring den fixa axeln.

En möjlig lösning, som bör vara stabil, är att $\phi = \nu t$, där ν är en konstant vinkelhastighet, och $\psi = 0$. Utveckla till linjär ordning kring denna lösning, dvs. $\phi = \nu t + \epsilon$, där $\epsilon \ll 1$, $\psi \ll 1$. Den första av ekvationerna ger då $\ddot{\epsilon} = -\frac{m}{M+2m}\ddot{\psi}$, och insättning i den andra ger $\ddot{\psi} + (1+\frac{2m}{M})\nu^2\psi = 0$. Vinkelhastigheten för svängningarna kring lösningen är $\omega = \nu\sqrt{1+\frac{2m}{M}}$. (Detta visar också att lösningen var stabil.) Det är rimligt att större ν ger snabbare svängningar — centrifugalkraften som vill återföra partikeln till $\psi = 0$ är då starkare.



6. Börja med att beräkna tröghetmomenten m.a.p. masscentrum. Om en axel väljs som symmetriaxeln är koordinataxlarna huvudtröghetsaxlar. M.a.p. symmetriaxeln är $I_3 = \frac{1}{2}mr^2$. Direkt beräkning av de andra ger $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ma^2 = \frac{1}{2}mr^2 = I_3 \equiv I$. Alla tre huvudtröghetsmomenten är lika, och kroppen beter sig som en sfär m.a.p. rotation. Före stöten är $\vec{L} = I\omega_0\hat{\zeta}$. Om vi låter impulsen vara riktad i ξ-led blir impulsmomentet $\frac{\sqrt{3}}{2}rp\hat{\eta}$, och rörelsemängdsmomentet efter stöten

$$\vec{L}' = I\omega_0\hat{\zeta} + \frac{\sqrt{3}}{2}rp\hat{\eta}\,.$$

Eftersom denna nya riktning också är en huvudtröghetsaxel, kommer rymdstationen att fortsätta rotera kring den, med vinkelhastigheten ω given av $(I\omega)^2 = (I\omega_0)^2 + \frac{3}{4}r^2p^2$, dvs.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3p^2}{m^2r^2}}\,.$$

Dessutom har man förstås en translationsrörelse för masscentrum med $\bar{v} = \frac{p}{m}\hat{\xi}$.