Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Onsdagen 6 april 2016
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. I ett koordinatsystem dr konens spets ligger i origo, och dess symmetriaxel är z-axeln, kan konen beskrivas som området $0 \le z \le h$, $0 \le \varrho \le \frac{r}{h}z$. Dess volym är $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, och alltså är $m = \rho V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho$. Om vi inför medelvärdet av en storhet Q som $<Q>= \frac{1}{V}\int_V Q\,dV$, så fås masscentrums läge som $\bar{z} =<z>= \frac{3}{4}h$. På grund av kroppens symmetri är koordinataxlarna huvudtröghetsaxlar. Vi har också de kvadratiska momenten $<x^2>=<y^2>= \frac{3}{20}r^2$, $<z^2>= \frac{3}{5}h^2$, och alltså $<(z-\bar{z})^2>=<z^2> - <z>^2= \frac{3}{80}h^2$. Tröghetsmomenten m.a.p. axlar genom masscentrum bli $\bar{I}_x = \bar{I}_y = m(<x^2> + <(z-\bar{z})^2>) = \frac{3}{80}m(4r^2+h^2)$, $\bar{I}_z = \frac{3}{10}mr^2$.

2. Det tar storleksordningen 1 s för pilen att komma till tavlan. Under den tiden hinner jorden vrida sig en vinkel ungefär 10^{-4}. Vinkelprecisionen som krävs i skyttet är ungefär 10^{-3}. Antagligen är Corioliseffekten försumbar jämfört med annat "brus". (Man kan förstås räkna explicit på Corioliskraften.)

3. Betrakta staven i ett accelererat system, där upphängningspunkten är i vila. I detta system får man inkludera en fiktiv kraft $\vec{F} = -\ddot{x}\hat{x} = mA\omega_0^2 \sin\omega_0 t\,\hat{x}$. Momentekvationen kring upphängningspunkten lyder då
$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + mA\omega_0^2\sin\omega_0 t\frac{\ell}{2}\cos\theta\,,$$
dvs. för små vinklar,
$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\theta = \frac{3A\omega_0^2}{2\ell}\sin\omega_0 t\,.$$
Lösningen består av en homogenlösning och en partikulärlösning, $\theta = \theta_h + \theta_p$, där
$$\theta_p(t) = \frac{\frac{3A\omega_0^2}{2\ell}}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega_0 t\,,$$
$$\theta_h(t) = B\sin\omega t + C\sin\omega t\,,$$
med $\omega^2 = \frac{3g}{2\ell}$. Konstanterna B och C bestäms av begynnelsevillkoren, med resultatet
$$\theta(t) = \frac{3A}{2\ell}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t\right)\,.$$
För att approximationen skall vara giltig krävs att detta är mycket mindre än 1 för alla tider. Om A är för stor gäller lösningen inte, och inte heller om ω_0 ligger för nära ω. I det senare fallet har man resonans, och amplituden växer initialt linjärt med tiden.

4. Med positiv referensriktning för hastigheten åt höger och för vinkelhastigheten medurs får man ekvationer för masscentrums translation resp. rotation runt masscentrum:
$$m\dot{v} = -\mu mg\,,$$
$$\frac{2}{5}ma^2\dot{\omega} = \mu mga\,.$$

så hastigheten och vinkelhastigheten blir

$$v = v_0 - \mu g t\,,$$
$$\omega = -\omega_0 + \frac{5\mu g}{2a} t\,.$$

Denna lösning gäller så länge glidning råder. När $r\omega = v$ börjar klotet rulla. Kalla tiden då det inträffar τ. Man får $\tau = \frac{2}{7}\frac{v_0 + a\omega_0}{\mu g}$, och $v(\tau) = \frac{1}{7}(5v_0 - 2a\omega_0)$. Klotet vänder tillbaka om $5v_0 - 2a\omega_0 < 0$. Läget som funktion av tiden blir

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2\,, & t \le \tau\,; \\ v_0\tau - \frac{1}{2}\mu g \tau^2 + v(\tau)(t-\tau)\,, & t \ge \tau\,. \end{cases}$$

5. Se sid. 564 i Meriam–Kraige.

6. Låt $\kappa = \frac{1}{2}k$. Då är $\dot z = \kappa\varrho\dot\varrho$, och den kinetiska energin blir

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot\varrho^2 + \varrho^2\dot\phi^2 + \kappa^2\varrho^2\dot\varrho^2 \right)\,,$$

och den potentiella $V = \frac{1}{2} m g \kappa \varrho^2$. Lagrangefunktionen ges av

$$\frac{L}{m} = \frac{1}{2}(1 + \kappa^2\varrho^2)\dot\varrho^2 + \frac{1}{2}\varrho^2\dot\phi^2 - \frac{1}{2}\kappa g \varrho^2\,.$$

Lagranges ekvationer blir

$$0 = \frac{d}{dt}\left[(1+\kappa^2\varrho^2)\dot\varrho\right] - \kappa^2\varrho\dot\varrho^2 - \varrho\dot\phi^2 + \kappa g \varrho\,,$$
$$0 = \frac{d}{dt}\left[\varrho^2\dot\phi\right]\,.$$

Den senare ekv. uttrycker rörelsemängdsmomentets bevarande. Sätt $\ell = \varrho^2\dot\phi$. Insättning i den förra ekvationen ger

$$0 = (1+\kappa^2\varrho^2)\ddot\varrho + \kappa^2\varrho\dot\varrho^2 - \frac{\ell^2}{\varrho^3} + \kappa g \varrho\,.$$