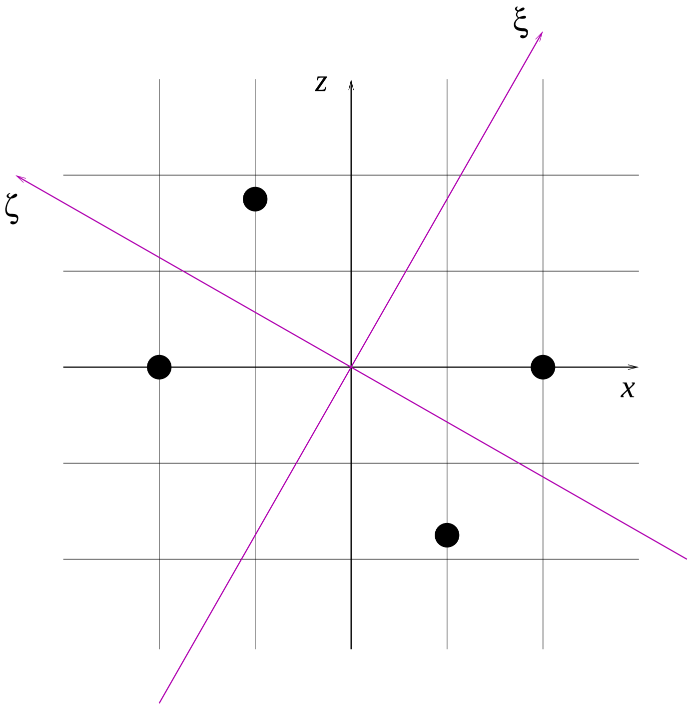
Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Torsdagen 3 juni 2016
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. För enkelhets skull kan vi betrakta punktmassor med massan 1 i punkterna $\pm(2,0,0)$, $\pm(0,1,0)$ och $\pm(1,0,-\sqrt{3})$, och till slut multiplicera resultatet med ma^2. Alla massorna ligger antingen på y-axeln eller i xz-planet. Det enda möjligt nollskilda deviationsmomentet är I_{xz}. y-axeln är redan en huvudtröghetsaxel. Om vi tittar på de fyra massorna som ligger i xz-planet ser det ut såhär:



Punkterna bildar en rektangel. Symmetrin gör att man kan läsa av huvudtröghetsaxlarna, det är ξ- och ζ-axlarna i figuren (roterade $\frac{\pi}{3}$ från de ursprungliga). Alla fyra massorna ligger på avståndet $\sqrt{3}$ från ξ-axeln, 1 från ζ-axeln, och 2 från y-axeln. De två resterande massorna på y-axeln har förstås avståndet 1 till både ξ- och ζ-axlarna. I $\xi y\zeta$-systemet är tröghetsmatrisen diagonal, med elementen $I_{\xi\xi} = 14$, $I_{yy} = 16$, $I_{\zeta\zeta} = 6$.

Alternativt skriver man upp tröghetsmatrisen i det givna systemet och diagonalierar med standardmetod.

2. Tröghetsmomentet m.a.p. cirkelns mittpunkt är, m.h.a. Steiners sats,

$$I_O = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(R^2 - \frac{\ell^2}{4}\right) = m\left(R^2 - \frac{\ell^2}{6}\right) .$$

Tyngdkraften ger ett återförande vridmoment $mg\sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}}\sin\theta$, där θ är vinkeln från det stabila (nedre) jämviktsläget. Rörelseekvationen blir alltså

$$m\left(R^2 - \frac{\ell^2}{6}\right)\ddot{\theta} = -mg\sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}}\sin\theta\,.$$

För små svängningar är $\sin\theta \approx \theta$, och man kan läsa av vinkelfrekvensen,

$$\omega^2 = g\frac{\sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}}}{R^2 - \frac{\ell^2}{6}} = \frac{g}{R}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1 - \frac{2}{3}\alpha^2}\,.$$

Detta maximeras då $\alpha^2 = \frac{1}{2}$. $\frac{R\omega^2}{g}$ tar värdet 1 då $\alpha = 0$, ökar till maxvärdet $\frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.06$ och går mot 0 då $\alpha \to 1$.

3. Rörelsen är en reguljär precessionsrörelse, och eftersom man vill anpassa precession och spinn till varandra så att inget moment behövs, måste rörelsemängdsmomentet vara konstant, dvs. riktat vertikalt. I ett system $\xi\eta\zeta$, där ζ-axeln är symmetriaxeln, är tröghetsmatrisen $ma^2\,\mathrm{diag}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Rotationsvektorn kan skrivas

$$\vec{\omega} = \nu\hat{\zeta} + \Omega(\hat{\zeta}\cos\theta - \hat{\xi}\sin\theta)\,,$$

där $\hat{\zeta}$ pekar uppåt längs symmetriaxeln i figuren, och $\hat{\xi}$ nedåt åt vänster längs skivan. Rörelsemängdsmomentet blir då

$$\vec{L} = \frac{1}{4}ma^2\left[-\hat{\xi}\Omega\sin\theta + 2\hat{\zeta}(\nu + \Omega\cos\theta)\right]\,.$$

Om det skall peka längs vertikalen är kvoten av ζ- och ξ-komponenterna $-\cot\theta$, dvs.

$$\cot\theta = \frac{2(\nu + \Omega\cos\theta)}{\Omega\sin\theta}\,.$$

Resultatet är att $\nu = -\frac{1}{2}\Omega\cos\theta$.

4. Tyngdkraften är oväsentlig; den förskjuter bara jämviktsläget. Rörelseekvationen för massan blir

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t\,,$$

där $f = \frac{F_0}{m}$, och $\omega = \omega_0$ Homogenlösningarna är som vanligt

$$x_h(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t\,.$$

Hade man haft $\omega \neq \omega_0$ hade partikulärlösningen varit

$$x_p(t) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t\,.$$

Nu blir den istället

$$x_p(t) = \frac{f}{2\omega}t\sin\omega t\,,$$

vilket kan verifieras genom insättning. Partikulärlösningen har $x_p(0) = 0$, $\dot{x}_p(0) = 0$, och är alltså den sökta lösningen.

Om man utgår från samma begynnelsevärdesproblem då $\omega \neq \omega_0$, får man

$$x(t) = \frac{f}{\omega^2 - \omega_0^2}(\cos\omega_0 t - \cos\omega t)\,.$$

Man kan analysera detta för $\omega \approx \omega_0$ genom att skriva $\omega = \frac{\omega+\omega_0}{2} + \frac{\omega-\omega_0}{2}$, $\omega_0 = \frac{\omega+\omega_0}{2} - \frac{\omega-\omega_0}{2}$, och expandera cosinus av en summa. Då får man

$$x(t) = \frac{2f}{\omega^2 - \omega_0^2} sin\frac{\omega+\omega_0}{2}t \sin\frac{\omega-\omega_0}{2}t\,.$$

Detta beskriver interferensen av svängningarna med de två frekvenserna som två faktorer. Den andra sinusfunktionen är en modulerande amplitud (envelopp), som då $\omega \approx \omega_0$ är mycket långsammare än den första faktorn. Då $\omega \to \omega_0$ kan man (för vilken tid t som helst) ta ett gränsvärde. Endast den linjära termen i den andra sinusfaktorn bidrager då, och resultatet blir precis det önskade,

$$\lim_{\omega\to\omega_0} x(t) = \frac{f}{2\omega} t \sin\omega t\,.$$

5. Inför koordinater ξ, η i planet så att $\hat{\xi}$ pekar österut och $\hat{\eta}$ norrut (då man befinner sig i $\xi = \eta = 0$, där planet tangerar sfären). Inför också en riktning $\hat{\zeta}$ rakt upp. Om man låter planet beskrivas av $\zeta = R$ och alltså $\vec{r} = \xi\hat{\xi} + \eta\hat{\eta} + R\hat{\zeta}$, så är $\dot{\vec{r}} = \dot{\xi}\hat{\xi} + \dot{\eta}\hat{\eta} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$, där $\vec{\Omega} = \Omega(\hat{\xi}\sin\theta + \hat{\zeta}\cos\theta)$. Då får man hastigheten för en partikel som rör sig i planet som

$$\vec{v} = \hat{\xi}(\dot{\xi} - \Omega\eta\cos\theta) + \hat{\eta}(\dot{\eta} + \Omega\xi\cos\theta - \Omega R\sin\theta) + \hat{\zeta}\Omega R\sin\theta\,.$$

Den kinetiska energin ges alltså av

$$\frac{2T}{m} = (\dot{\xi} - \Omega\eta\cos\theta)^2 + (\dot{\eta} + \Omega\xi\cos\theta - \Omega R\sin\theta)^2 + (\Omega R\sin\theta)^2\,.$$

Använd $L = T$. Lagranges ekvationer blir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\dot{\xi} - \Omega\eta\cos\theta) - \Omega\cos\theta(\dot{\eta} + \Omega\xi\cos\theta - \Omega R\sin\theta) \\ &= \ddot{\xi} - 2\Omega\cos\theta\dot{\eta} - \Omega^2\cos^2\theta\xi + \Omega^2 R\sin\theta\cos\theta\,, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\dot{\eta} + \Omega\xi\cos\theta - \Omega R\sin\theta) + \Omega\cos\theta(\dot{\xi} - \Omega\eta\cos\theta) \\ &= \ddot{\eta} + 2\Omega\cos\theta\dot{\xi} - \Omega^2\cos^2\theta\eta\,. \end{aligned}$$

Termerna $-2\Omega\cos\theta\dot{\eta}$ och $2\Omega\cos\theta\dot{\xi}$ representerar Coriolisaccelerationen. De kan kombineras till

$$2\Omega\cos\theta(-\dot{\eta}\hat{\xi} + \dot{\xi}\hat{\eta}) = 2\Omega\cos\theta\hat{\zeta} \times (\dot{\xi}\hat{\xi} + \dot{\eta}\hat{\eta})\,.$$

6. För att få reda på momentet i pinnen behöver man “ta isär” den; de inre krafterna och momenten skall vara precis de som gör att *en del av* pinnen faller lika fort som *hela* pinnen. Använd referensriktningar och beteckningar enligt figurerna i uppgiften.

Tröghetsmoment kring O för en stav med längden $x\ell$ är $\frac{1}{3}\varrho x^3\ell^3$. Det vridande momentet från tyngdkraften är $\frac{1}{2}\varrho g x^2\ell^2\sin\theta$. Delen av pinnen rör sig då enligt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\varrho x^3\ell^3\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\varrho g x^2\ell^2\sin\theta + x\ell t(x) - m(x)\,,\\
&\varrho x\ell\cdot\frac{1}{2}x\ell\ddot{\theta} = -T + t(x) + \varrho g x\ell\sin\theta\,,
\end{aligned}$$

där den första ekvationen är momentekvation, och den andra masscentrums acceleration i θ-led. (Den andra ekvationen kommer att behövas, eftersom den första, som skulle kunna bestämma $m(x)$, också innehåller $t(x)$. Det finns också en ekvation för accelerationen i radiell led, som inte behövs.)

Då $x = 1$ gäller ekvationerna hela pinnen, och då är $t(1) = 0$, $m(1) = 0$. Man får

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\varrho\ell^3\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\varrho g\ell^2\sin\theta\,,\\
&\frac{1}{2}\varrho\ell^2\ddot{\theta} = -T + \varrho g\ell\sin\theta\,.
\end{aligned}$$

Nu frågas det inte efter hur pinnen faller, utan det intressanta är att bestämma $m(x)$ (som också är en funktion av θ). Insättning av lösningen för $\ddot{\theta}$ och T,

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{3g}{2\ell}\sin\theta\,,\\
T &= \frac{1}{4}\varrho g\ell\sin\theta\,,
\end{aligned}$$

i de tidigare ekvationerna ger

$$\begin{aligned}
t(x) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-3x)\varrho g\ell\sin\theta\,,\\
m(x) &= \frac{1}{4}x(1-x)^2\varrho g\ell^2\sin\theta\,.
\end{aligned}$$

Det maximala momentet längs pinnen är för $x = \frac{1}{3}$ (för alla vinklar). Störst är det då $\theta = \frac{\pi}{2}$, då det blir $\frac{1}{27}\varrho g\ell^2$.