Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Fredagen 7 oktober 2016
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Låt ϕ beteckna vinkeln från jämviktsläget. Pinnens tröghetsmoment m.a.p. upphängningspunkten är $\frac{1}{3}m\ell^2$. Tyngdkraften utövar ett moment $-mg\frac{\ell}{2}\sin\phi$. Den viskösa kraften ger kraften $c\,dx\,x\dot{\phi}$ på en liten del av pinnen, så dess moment blir $-c\dot{\phi}\int_0^\ell x^2dx = -\frac{1}{3}c\ell^3\dot{\phi}$. Rörelseekvationen blir

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\phi} = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\phi - \frac{1}{3}c\ell^3\dot{\phi}\,,$$

vilket för små vinklar ger

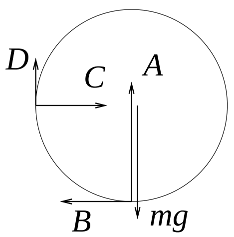
$$\ddot{\phi} + \frac{c\ell}{m}\dot{\phi} + \frac{3g}{2\ell}\phi = 0\,.$$

Kritisk dämpning fås då $\frac{c\ell}{2m} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$, dvs. då

$$c = \sqrt{\frac{6m^2g}{\ell^3}}\,.$$

Här bör en dimensionskontroll göras.

2. a.



Friläggning enligt figuren, där $B = \mu A$, $D = \mu C$. Kraftjämvikt ger $C = B = \mu A$ och $mg - A = D = \mu C = \mu^2 A$. Krafterna är alltså

$$A = \frac{1}{1+\mu^2}mg\,,$$
$$B = \frac{\mu}{1+\mu^2}mg\,,$$
$$C = \frac{\mu}{1+\mu^2}mg\,,$$
$$D = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}mg\,.$$

Cylinderns rörelseekvation är

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\phi} = -\frac{\mu+\mu^2}{1+\mu^2}mgR.$$

sålänge $\dot{\phi} > 0$. Med begynnelsevillkoren $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ är lösningen

$$\dot{\phi}(t) = \omega_0 - \frac{2\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}\frac{g}{R}t\,,$$

$$\phi(t) = \omega_0 t - \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}\frac{g}{R}t^2\,.$$

Cylindern stannar vid $t = \frac{1+\mu^2}{2\mu(1+\mu)}\frac{R\omega_0}{g}$; antalet varv den då har roterat är

$$N = \frac{1+\mu^2}{8\pi\mu(1+\mu)}\frac{R\omega_0^2}{g}\,.$$

b. Nu är normalkraften mg och friktionskraften μmg. Ekvationerna för translation och rotation är

$$m\ddot{x} = -\mu mg\,,$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\phi} = -\mu mgR\,.$$

Lösningen, med de givna begynnelsevillkoren (samt $x(0) = 0$, $\phi(0) = 0$), är

$$\dot{x}(t) = v_0 - \mu g t\,,$$

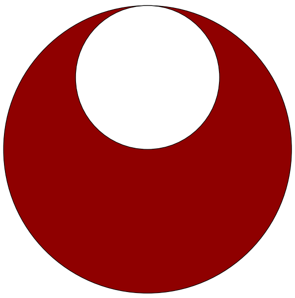
$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2\,,$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t\,,$$

$$\phi(t) = \omega_0 t - \frac{\mu g}{R}t^2\,.$$

Detta gäller sålänge cylindern glider, dvs. sålänge $\dot{\phi} > -\frac{\dot{x}}{R}$. Om cylindern skall vända måste det gälla åtminstone tills $\dot{x} = 0$, dvs. till tiden $t = \frac{v_0}{\mu g}$, då cylindern isåfall har färdats sträckan $\frac{v_0^2}{2\mu g}$. Villkoret att $\dot{\phi} > 0$ vid denna tidpunkt ger $\omega_0 > \frac{2v_0}{R}$.

3. Kroppen utgörs av området innanför en sfär med radien a, centrerad i origo, med en sfärisk hålighet med hälften så stor radie, se fig.



Enklast är nog att se detta som en stor homogen boll med densitet ρ och en liten boll med densitet $-\rho$. Av symmetriskäl är koordinataxlarna huvudtröghetsaxlar. Den stora bollen har alla tre tröghetsmoment lika med $\frac{2}{5}\frac{4\pi a^3}{3}\rho a^2 = \frac{8\pi}{15}\rho a^5$. Den lilla bollen har tre lika tröghetsmoment $-\frac{2}{5}\frac{4\pi(a/2)^3}{3}\rho(a/2)^2 = -\frac{\pi}{60}\rho a^5$ m.a.p. sitt masscentrum. M.a.p. origo tillkommer $m(a/2)^2 = -\frac{4\pi(a/2)^3}{3}\rho(a/2)^2 = -\frac{\pi}{24}\rho a^5$ för momenten m.a.p. x- och y-axlarna. Totalt blir

$$I_x = I_y = \pi\rho a^5\left(\frac{8}{15} - \frac{1}{60} - \frac{1}{24}\right) = \frac{19\pi}{40}\rho a^5\,,$$

$$I_z = \pi\rho a^5\left(\frac{8}{15} - \frac{1}{60}\right) = \frac{31\pi}{60}\rho a^5\,.$$

4. En kropp som faller vertikalt nedåt utsätts för en Corioliskraft av storleken $2m\Omega(-\dot{z})\cos\theta$ österut, där Ω är jordens vinkelhastighet och θ latituden. Kalla riktningen österut för $\hat{x}$. Till lägsta ordning kan man strunta i att rörelsen i z-led påverkas, så $\dot{z} = -gt$ och $z = h - \frac{1}{2}gt^2$ om kroppen släpps från höjden h. Rörelseekvationen i x-led blir

$$m\ddot{x} = 2m\Omega g \cos\theta t\,,$$

så rörelsen blir $x(t) = \frac{1}{3}\Omega g \cos\theta t^3$. Kroppen når marken då $t = \sqrt{2h/g}$, och då är

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\Omega h^{3/2}}{\sqrt{g}}\cos\theta\,.$$

En dimensionskontroll bör göras.

5. Vardera halvan av fjädern har längd a och fjäderkonstant k. Langrangianen blir

$$\mathcal{L} = 2\left(\frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + (a+\xi)^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k\xi^2\right)\,.$$

Lagranges ekvationer är

$$0 = m\ddot{\xi} + k\xi - m(a+\xi)\dot{\theta}^2\,,$$
$$0 = \frac{d}{dt}\left[m(a+\xi)^2\dot{\theta}\right]\,.$$

Uttrycket i hakparenteser är rörelsekonstanten L. Man kan alltså sätta in $\dot{\theta} = \frac{L}{m(a+\xi)^2}$ i x-ekvationen,

$$0 = \ddot{\xi} + \frac{k}{m}\xi - \frac{L^2}{m^2(a+\xi)^3}\,.$$

Om L är litet, så att $\xi \ll a$ kan man skriva detta som

$$\ddot{\xi} = -\frac{k}{m}\xi + \frac{L^2}{m^2a^3}(1 - \frac{3\xi}{a})\,.$$

Den effektiva fjäderkonstanten blir $k' = k + \frac{3L^2}{ma^4}$, och vinkelfrekvensen för små svängingar ges av

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{3L^2}{kma^4}\right)$$

(förutsatt att den andra termen är mycket mindre än den första). Dimensionskontroll.

6. I ett koordinatsystem som är anpassat efter kroppen, med origo i dess masscentrum och ζ-axeln längs den långa pinnen, fås tröghetsmatrisen diag$(\frac{3}{4}\rho\ell^3, \frac{3}{4}\rho\ell^3, \frac{1}{6}\rho\ell^3)$. Masscentrum är i vila. Standardmetod med utnyttjande av $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ ger

$$\frac{7}{12}\Omega^2\cos\theta - \frac{1}{6}\Omega\nu = -4\frac{g}{\ell}\,.$$