Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 16/8-2005.

1. Jag tänker mig att det rör sig om, antingen en sådan dörr som bara skall svänga igen mjukt när den lämnas för sig själv, eller också en svängdörr som kan svänga ut åt bägge hållen. Men inte en sådan dörr som man vill skall slå igen med viss kraft, så att den låser sig i stängt läge av sig själv, för de brukar ha annorlunda fungerande stängningsanordningar.
   Dörrens tröghetsmoment med avseende på vridningsaxeln är

$$I = mb^2/3 = 5\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

   Rörelseekvation för dörrens svängning är

$$I\ddot{\theta} = -c\dot{\theta} - k\theta.$$

   Högerledet består av stängningsanordningens två kraftmoment enligt uppgiftstexten. Kraftmomentet $-k\theta$ stänger dörren om $k > 0$. Kraftmomentet $-c\dot{\theta}$ dämpar svängningsrörelsen om $c > 0$. Det gäller att välja k så att dörren får upp lagom fart, och c så att den stannar så fort som möjligt. Det är enklast att först bestämma lämpligt c givet k. Om rörelsen är underdämpad innehåller bägge partikulärlösningarna en faktor $\exp(-tc/2I)$. De är dämpade svängningar, och dämpningen sker snabbare ju större c väljs. Om rörelsen är överdämpad är bägge partikulärlösningarna exponentialfunktioner. Den långsammast avtagande avtar långsammare ju större c väljs. För att uppnå snabbast möjliga garanterade avtagande amplitud för svängdörren är det därför bäst att välja c motsvarande kritisk dämpning.
   En dörr av första slaget kan antingen slå igen med stöt efter ändlig tid, eller också minska sin amplitud exponentiellt under oändlig tid. Kraftig stöt medför icke önskvärda stötkrafter. Stötrisken kan inte elimineras helt. Om rörelsen är underdämpad sker stöt oberoende av startvillkor. Men om rörelsen är överdämpad sker den bara om dörren startas med tillräckligt stor stängande fart, inte om dörren startas utan fart, som vanligen är fallet om man är aktsam. Även för sådana dörrar finns alltså ett gott argument för att välja kritisk dämpning. Då är rörelseekvationen

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \\ &w_0^2 = k/I, \quad 2\zeta w_0 = c/I, \quad \zeta = 1. \end{aligned}$$

   Eftersom en sekund är en typisk tidsskala för en dörrs rörelse, föreslår jag valet $w_0 = 1\,\mathrm{s^{-1}}$. Detta innebär följande val av propotionalitetskonstanterna

$$\begin{aligned} k &= I\omega_0^2 = 5\,\mathrm{kg\,m^2/s^2} = 5\,\mathrm{Nm/radian}, \\ c &= 2I\omega_0 = 10\,\mathrm{kg\,m^2/s} = 10\,\mathrm{Nm/(radian/s)}. \end{aligned}$$

2. a) Dimensionsanalys. d kan bero av h, g, ω, och latituden θ. Så vi bör ha ett samband på formen

$$d = \omega f(h, g, \theta),$$

   med okänd funktion f. De ingående parametrarnas dimensioner är

$$[d/\omega] = LT, \quad [h] = L, \quad [g] = L/T^2, \quad [\theta] = 1.$$

Tid- och längd-dimensionerna måste stämma överens i ekvationens bägge led. Dessa två villkor bestämmer f's beroende av g och h, med resultatet

$$d = \omega g^{-1/2} h^{3/2} \tilde{f}(\theta),$$

där $\tilde{f}$ är en ny okänd funktion. Om man dessutom observerar att d beror av vinkelhastighetens horisontella komponent, $\omega \cos(\theta)$, men inte av dess vertikala komponent, $\omega \sin(\theta)$, så blir sambandet bestämt upp till en propotionalitets-konstant,

$$d = \omega \cos(\theta) g^{-1/2} h^{3/2} \cdot \text{konst.}.$$

b) Rörelseekvation och corioliskraftuttryck är

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{z} + \vec{F}_c, \qquad \vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}.$$

Med koordinater så att basvektorerna $\hat{z}$, $\hat{x}$, och $\hat{y}$ pekar vertikalt, österut, och norrut, respektive, blir rörelseekvationen i komponentform

$$\begin{aligned}
&\vec{\omega} = \omega(\hat{z}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta)),\\
&\dot{\vec{r}} \approx \dot{z}\hat{z}, \qquad \text{(enligt ledning)}\\
&m\ddot{z} = -mg,\\
&m\ddot{x} = -2m\omega\cos(\theta)\dot{z}.
\end{aligned}$$

Lösningen är, med falltiden t_0,

$$\begin{aligned}
&z(t) = h - gt^2/2, \qquad t_0 = \sqrt{2h/g},\\
&x(t) = \omega g \cos(\theta)\, t^3/3,\\
&d = x(t_0) = (1/3)\omega \cos(\theta) g^{-1/2} (2h)^{3/2} =\\
&= (1/3) \cdot 0.73 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot 0.72 \cdot (2 \cdot 55\,\mathrm{m})^{3/2} (9.8\,\mathrm{m/s^2})^{-1/2} \approx 6.5\,\mathrm{mm}.
\end{aligned}$$

Svar: Avvikelsen är $d = 6.5$ mm åt öster.

3. Mina beteckningar: x = koordinataxel riktad utför lutande planet, x_c = masscentrums koordinat, ω = klotets vinkelhastighet, m = dess massa, a = dess radie, p = kontaktpunkten mellan klot och plan, F_c = friktionskraften i p, riktad uppför planet. $I_c = (2/5)ma^2$ = kulans tröghetsmoment med avseende på masscentrum. I_p = kulans tröghetsmoment med avseende på p = $I_c + ma^2 = (7/5)ma^2$.
a) Rörelsemängdslagen för masscentrums rörelse, och rörelsemängdsmomentlagen för rotationsrörelsen kring masscentrum ger

$$m\ddot{x}_c = mg\sin\alpha - F_c, \qquad I_c\dot{w} = -F_c\, a.$$

Om villkoret för ingen glidning i p, $\dot{x}_c + a\omega = 0$, används till att eliminera variabeln w, och om sedan F_c elimineras ur ekvationssystemet, återstår ekvationen

$$(m + I_c/a^2)\,\ddot{x}_c = mg\sin\alpha.$$

b) Rörelsemängdsmomentlagen med avseende på p ger

$$I_p \dot{\omega} = -amg \sin \alpha.$$

Om man använder sambandet mellan ω och $\dot{x}$, och sambandet mellan I_c och I_p, så ser man att de bägge rörelseekvationerna beskriver samma acceleration,

$$\ddot{x}_c = mg \sin \alpha \, a^2 / I_p = (5/7) \, g \sin \alpha.$$

4. Jag använder beteckningarna i figur 7/20 och ekvation (7/27) i läroboken, samt N = normalkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet, F_v = vertikala komponenten och F_h = horisontella komponenten, riktad bort från snurran, av sökta kontaktkraften i O. Vi har, med hjälp av informationen i uppgiftstexten,

$$\sin \theta = \ell / \sqrt{\ell^2 + r^2}, \qquad I = mr^2/2,$$
$$\cos \theta = r / \sqrt{\ell^2 + r^2}, \qquad I_0 = mr^2/4 + m\ell^2.$$

Spinnet bestäms av precessionen och av att kontaktpunktens momentana hastighet är noll (eftersom skivan inte glider). Vi har

$$\dot{\psi} = \Omega, \qquad p = -\Omega \sqrt{\ell^2 + r^2} / r = -\Omega / \cos \theta.$$

Kraftmomentet i ekvation (7/27) är med avseende på O och orsakas av N och gravitationskraften. Ekvation (7/27) tar formen

$$mg\ell \sin \theta - N \sqrt{\ell^2 + r^2} = \Omega^2 \sin \theta (I(\cos \theta - 1/\cos \theta) - I_0 \cos \theta).$$

Denna ekvation bestämmer sökta kraften N till

$$N = mg \sin^2 \theta + \frac{\Omega^2}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \tan \theta (I \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta),$$

där $\sin \theta$, $\cos \theta$, I, och I_0 är givna ovan. Kontaktkrafterna i O kan nu fås med hjälp av rörelsemängdslagen. Masscentrums acceleration är $\ell \sin \theta \Omega^2$ i samma riktning som F_h. Resultat

$$F_v = mg - N = mg \cos^2 \theta - \frac{\Omega^2}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \tan \theta (I \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta),$$
$$F_h = m\ell \sin \theta \, \Omega^2.$$

5. Enligt uppgiftstexten är rörelseekvationen och rörelsen respektive

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + F_0 \cos(\omega t),$$
$$x(t) = A \cos(\omega t - \pi/4) = A/\sqrt{2}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)),$$

där A är den sökta amplituden. Insättning av ansatsen i rörelseekvationen, och identifiering av sinustermer och cosinustermer ger ekvationssystemet

$$A/\sqrt{2}(-m\omega^2 - b\omega + k) = 0,$$
$$A/\sqrt{2}(-m\omega^2 + b\omega + k) = F_0.$$

Dess lösning ger svaret till uppgiftsfrågan:

$$b = k/w - m\omega,$$
$$A = F_0/(\sqrt{2}(k - m\omega^2)).$$