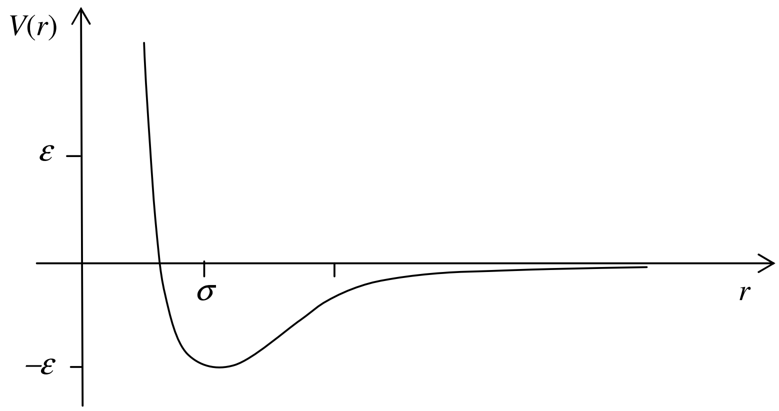
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för teknisk fyusik
Göran Niklasson

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik del 2 för F1 2005-08-26

Uppgift 1

Skiss:



Kraften mellan atomerna bestäms av potentialens derivata:

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{4\varepsilon}{\sigma}\left[12\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - 6\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right]$$

Jämviktsläget r_0 bestäms av att kraften $F(r_0)$ skall vara noll, vilket ger

$$r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma = 1{,}12\sigma$$

Bindningsenergin blir

$$E_0 = -V(r_0) = -4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{6}\right] = -4\varepsilon\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = \varepsilon$$

I närheten av jämviktsläget kan vi använda Taylorutveckling och försumma termer av högre ordning än kvadratisk, vilket ger

$$V(r) = V(r_0) + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

där

$$k = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_0} = \frac{4\varepsilon}{\sigma^2}\left[12\cdot 13\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{14} - 6\cdot 7\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{8}\right] = \frac{24\varepsilon}{\sigma^2}\left[\frac{26}{2^{7/3}} - \frac{7}{2^{4/3}}\right]$$

$$= \frac{24\varepsilon}{\sigma^2}\left[\frac{13}{2^{4/3}} - \frac{7}{2^{4/3}}\right] = \frac{72\varepsilon}{\sqrt[3]{2}\sigma^2}$$

Vi har nu reducerat modellen till en harmonisk oscillator med fjäderkonstanten k och massan $m/2$ (den ”reducerade massan” för tvåkroppssystemet). Vinkelfrekvensen för små svängningar blir alltså

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{144\varepsilon}{\sqrt[3]{2}m\sigma^2}} = \frac{12}{\sqrt[6]{2}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\sigma^2}} = 10{,}7\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\sigma^2}}$$

<u>Svar</u>: $r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma$; $E_0 = \varepsilon$; $\omega = \frac{12}{\sqrt[6]{2}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\sigma^2}}$

Uppgift 2

Låt oss undersöka det värsta tänkbara fallet. Det innebär spel vid nordpolen eller sydpolen, eftersom det är där corioliskraften är som störst. Vi kan vid polerna bortse från att jorden är sfärisk och alltså betrakta jordytan som en plan karusell, där vi för enkelhets skull antar att bowlingklotet kastas ut från mitten (polen), d.v.s. från en punkt som är i vila. Corioliskraften gör att klotet tycks vika av åt sidan i stället för att röra sig rätlinjigt, d.v.s. rörelsen tycks strida mot Newtons första lag, men ser vi det hela i ett större perspektiv kan vi i stället beskriva det som att klotet rör sig rätlinjigt medan målet (käglorna) flyttar sig åt sidan för att de följer med i jordens rotation. Under ett dygn ($T = 24 \cdot 3600$ s) flyttar sig målet sträckan $2\pi L$ där L är banans längd (L = 19,16 m). Under den tid t då klotet är i rörelse längs banan hinner målet alltså flytta sig en sträcka δ som ges av

$$\delta = 2\pi L \frac{t}{T}$$

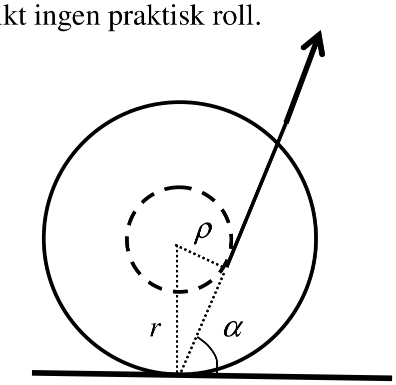
Med $t = 2$ s fås $\delta = 3$ mm och med $t = 3$ s fås $\delta = 4$ mm. På mera normala breddgrader blir avvikelsen mindre och vid ekvatorn blir den noll. Med användning av det formella uttrycket för corioliskraften finner man att ovanstående uttryck för δ skall multipliceras med sinus för latitudvinkeln.

Huruvida ett par millimeters avvikelse är väsentlig eller inte är svårt att säga för den som inte har egen erfarenhet av bowling, men troligen är det oväsentligt. I praktiken gör man förstås inga beräkningar utan man lär sig spelet genom ”trial and error”, vilket innebär att man automatiskt bygger in hänsynstagande till alla relevanta faktorer. Om corioliskraften spelar en väsentlig roll så skulle spelare från nordliga länder få problem när de tävlar i t.ex. Australien. Så är veterligen inte fallet.

Om man av någon anledning vill minimera bidraget från corioliskraften kan man förstås göra det genom att kasta klotet med stor hastighet, så att tiden t blir liten, men det skulle kanske påverka spelet negativt i andra avseenden.

Svar: Avvikelsen är högst ett par millimeter och spelar sannolikt ingen praktisk roll.

Uppgift 3

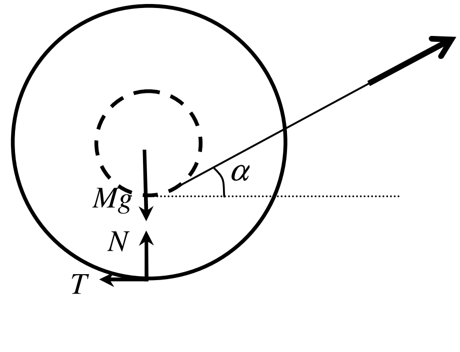


Åt vilket håll trådrullen börjar rulla avgörs av riktningen hos kraftens moment med avseende på kontaktpunkten mot underlaget. I gränsfallet att kraftens verkningslinje går genom kontaktpunkten kommer rullen varken att rulla åt vänster eller åt höger (om man drar tillräckligt hårt börjar den glida utan att vrida sig, men i texten förutsätts att friktionen är tillräcklig för att förhindra detta).

Med hjälp av figuren ser man att i gränsfallet gäller $\cos\alpha = \rho/r$. Rullningen blir åt vänster om $\alpha > \arccos(\rho/r)$ och åt höger om $\alpha < \arccos(\rho/r)$.

För att bestämma accelerationens storlek krävs en mera detaljerad analys. Vi låter M beteckna trådrullens sammanlagda massa och a dess tyngdpunktsacceleration, räknad positiv åt höger. Med kraftbeteckningar enlig figuren ger lagen för masscentrums rörelse ekvationerna

$$Ma = F\cos\alpha - T$$
$$0 = N + F\sin\alpha - Mg$$



Vid rullning utan glidning gäller att vinkelaccelerationen är a/r (med positiv riktning medurs). Impulsmomentlagen m.a.p. masscentrum ger då

$$I\frac{a}{r} = Tr - F\rho$$

där I är tröghetsmomentet m.a.p. masscentrum. Ur dessa tre ekvationer kan vi bestämma a, N och T. Resultatet för a är

$$a = \left(\frac{r\cos\alpha - \rho}{Mr^2 + I}\right)rF$$

Vi noterar att tecknet på a stämmer med vad som sades inledningsvis om rullningens riktning. Nu återstår bara att uttrycka M och I i de givna storheterna μ, m, ρ och r:

$$M = \mu + 2m$$

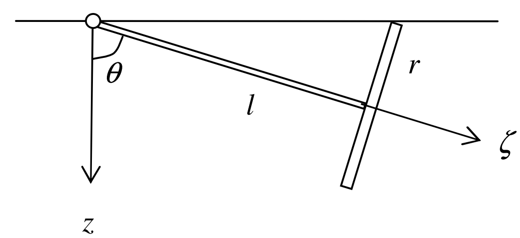
$$I = \frac{1}{2}\mu\rho^2 + \frac{1}{2}2mr^2$$

Efter lite algebra fås svaret.

<u>Svar</u>: $a = 2r\left(\frac{r\cos\alpha - \rho}{2\mu r^2 + 6mr^2 + \mu\rho^2}\right)F$ med positiv riktning åt höger.

Uppgift 4

För att beskriva rörelsen inför vi två koordinatsystem: ett kroppsfixerat system $\xi\eta\zeta$ och ett rumsfixerat system xyz, båda med origo i O. Kroppens symmetriaxel är ζ-axeln, och den rumsfixa z-axeln pekar vertikalt nedåt. Motsvarande basvektorer betecknas med ”hattar”: $\hat{\boldsymbol{\zeta}}, \hat{\mathbf{z}}$. Vinkeln mellan ζ-axeln och z-axeln betecknas med θ. Den är relaterad till de givna storheterna r och l genom sambandet

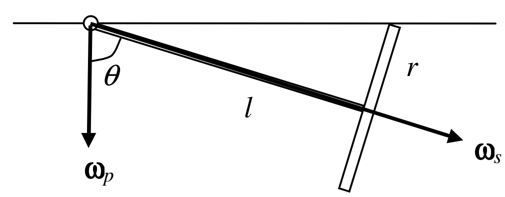


$$\theta = \arctan\frac{l}{r}$$

Kroppens rotationsvektor kan skrivas

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_s$$

där $\boldsymbol{\omega}_p$ beskriver precessionen och $\boldsymbol{\omega}_s$ beskriver spinnet kring symmetriaxeln:



$$\boldsymbol{\omega}_p = \Omega\hat{\mathbf{z}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_s = \omega_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

Spinnet ω_s kan uttryckas i precessionshastigheten Ω med hjälp av rullningsvillkoret, vilket ger (observera tecknet)

$$\omega_s = -\frac{\sqrt{r^2 + l^2}}{r}\Omega = -\frac{\Omega}{\cos\theta}$$

Kroppens rörelsemängdsmoment $\mathbf{L}$ med avseende på punkten O är

$$\mathbf{L} = I_\xi\omega_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} + I_\eta\omega_\eta\hat{\boldsymbol{\eta}} + I_\zeta\omega_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

där I_ξ, I_η och I_ζ är de tre huvudtröghetsmomenten. På grund av rotationssymmetrin gäller att $I_\eta = I_\xi$. Uttrycket för rörelsemängdsmomentet kan då omformas på följande sätt:

$$\mathbf{L} = I_\xi\omega_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} + I_\xi\omega_\eta\hat{\boldsymbol{\eta}} + I_\xi\omega_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}} + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\omega_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}} = I_\xi\boldsymbol{\omega} + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\omega_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

Med hjälp av figuren ser vi att

$$\omega_\zeta = \omega_s + \Omega\cos\theta$$

vilket ger

$$\mathbf{L} = I_\xi\left(\Omega\hat{\mathbf{z}} + \omega_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right) + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\left(\omega_s + \Omega\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}} = I_\xi\Omega\hat{\mathbf{z}} + \left[I_\zeta\omega_s + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\Omega\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

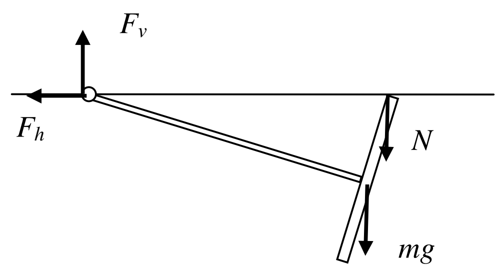
$$= I_\xi\Omega\hat{\mathbf{z}} + \left[-I_\zeta\frac{\Omega}{\cos\theta} + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\Omega\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\zeta}} = I_\xi\Omega\hat{\mathbf{z}} - \left(I_\zeta\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + I_\xi\cos\theta\right)\Omega\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

där vi använt rullningsvillkoret för att utrycka ω_s i Ω. Nästa steg är att bestämma tidsderivatan av $\mathbf{L}$:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} = \Omega\hat{\mathbf{z}}\times\left[I_\xi\Omega\hat{\mathbf{z}} - \left(I_\zeta\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + I_\xi\cos\theta\right)\Omega\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right]$$

$$= \left(I_\zeta\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + I_\xi\cos\theta\right)\Omega^2\hat{\boldsymbol{\zeta}}\times\hat{\mathbf{z}}$$

Det vektoriella kraftmomentet med avseende på O är



$$\boldsymbol{\tau} = l\hat{\boldsymbol{\zeta}}\times mg\hat{\mathbf{z}} + \frac{l}{\sin^2\theta}\hat{\boldsymbol{\zeta}}\times N\hat{\mathbf{z}}$$

$$= \left(mg + \frac{N}{\sin^2\theta}\right)l\hat{\boldsymbol{\zeta}}\times\hat{\mathbf{z}}$$

Impulsmomentlagen $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$ ger nu

$$\left(I_\zeta\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + I_\xi\cos\theta\right)\Omega^2 = \left(mg + \frac{N}{\sin^2\theta}\right)l$$

$$N = \frac{\sin^2\theta}{l\cos\theta}\left(I_\zeta\sin^2\theta + I_\xi\cos^2\theta\right)\Omega^2 - mg\sin^2\theta$$

För att N skall vara positiv måste precessionshastigheten Ω uppfylla villkoret

$$\Omega \geq \sqrt{\frac{mgl}{I_\zeta\sin^2\theta + I_\xi\cos^2\theta}}$$

Kraftkomponenterna F_v och F_h i punkten O bestäms ur lagen för masscentrums rörelse:

$$F_v = mg + N = mg\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{l\cos\theta}\left(I_\zeta\sin^2\theta + I_\xi\cos^2\theta\right)\Omega^2$$

$$F_h = m\Omega^2 l\sin\theta$$

Nu återstår bara att sätta in utryck för $\sin\theta$, $\cos\theta$, I_ξ och I_ζ:

$$\sin\theta = \frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}; \qquad \cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

$$I_\xi = \frac{1}{4}mr^2 + ml^2; \qquad I_\zeta = \frac{1}{2}mr^2$$

Efter lite enkel algebra fås svaret

<u>Svar</u>: Villkoret är att $$\Omega \geq \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4gl\left(r^2+l^2\right)}{r^2+6l^2}}$$

Tryckkraften i kontaktpunkten är $$N = \frac{mlr\Omega^2}{4\sqrt{r^2+l^2}^{\,3}}\left(r^2+6l^2\right) - mg\frac{l^2}{r^2+l^2}$$

Den vertikala kraftkomponenten i O är $F_v = \frac{mlr\Omega^2}{4\sqrt{r^2+l^2}^3}\left(r^2+6l^2\right)+mg\frac{r^2}{r^2+l^2}$

Den horisontella raftkomponenten i O är $F_h = \frac{m\Omega^2 l^2}{\sqrt{r^2+l^2}}$

F_v är riktad uppåt och F_h är riktad inåt (centripetalkraft).

Uppgift 5

Antag att den sammanlagda fjäderkonstanten är k och låt x beteckna motorns koordinat i vertikal led. Rörelseekvationen i närvaro av dämpare men utan extra vikt blir då

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + ma\nu^2\cos\nu t$$

vilket kan skrivas som

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{m}{M}a\nu^2\cos\nu t$$

Detta är en linjär inhomogen differentialekvation som lätt kan lösas. Efter det att insvängningsförloppet har dött ut fås en stationär svängningsrörelse med amplituden (se t.ex. Physics Handbook):

$$A = \frac{ma\nu^2}{\sqrt{\left(k - M\nu^2\right)^2 + \left(b\nu\right)^2}}$$

Utan dämpare ($b = 0$) men med en extra massa K fås i stället

$$A = \frac{ma\nu^2}{\sqrt{\left(k - M\nu^2 - K\nu^2\right)^2}}$$

Enligt förutsättningen skall dessa två uttryck för A vara lika vilket innebär att

$$\left(k - M\nu^2\right)^2 + \left(b\nu\right)^2 = \left(k - M\nu^2 - K\nu^2\right)^2$$

Dessutom sägs att resonans uppkommer om både dämpare och extravikt saknas. Det innebär att $k = M\nu^2$. Villkoret ovan förenklas då till

$$\left(b\nu\right)^2 = \left(K\nu^2\right)^2$$

vilket ger svaret.

<u>Svar</u>: $b = K\nu$