1) Rörelseekvationen för bilens masscentrums position i vertikalled, x, är på formen

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0 - h(t)) - b\frac{d}{dt}(x - h(t)) - mg$$

där $h(t)$ är markens höjd under bilen, k = fjäderkonstant, b = dämpkonstant, x_0 = konstant.

Efter trottoarkantspassagen är $h(t)$ = konstant. Med lämpligt val av origo har man då ekv.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \,, \quad \text{som kan skrivas}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \,, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \,, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{m} .$$

Allm. lösn: $x(t) = \left(A\, c(\omega_d t) + B\, s(\omega_d t)\right) e^{-\zeta\omega_n t}$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Antag passagen sker vid tiden $t=0$.

För $t<0$ har man samma ekvation, fast med jämviktsläget $x=-h$, h = trottoarkantens höjd. $\Rightarrow$ Randvillkor: $x(0) = -h$ $\quad \dot{x}(0) = 0$.

dvs $A = -h$, $\quad -\zeta\omega_n A + \omega_d B = 0 \quad B = -\zeta\frac{\omega_n}{\omega_d}h$

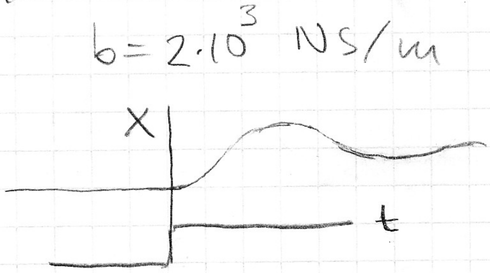
Enligt min erfarenhet av bilfärder är svängningsrörelsen något underdämpad och periodtiden $\sim 1\,s$.

Realistiska parametervärden kan vara

$m = 10^3\,kg \qquad h = 0.1\,m \qquad \omega_n = 10\,s^{-1} \qquad \zeta = 0.5$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad k = 10^5\,N/m \qquad b = 2\cdot 10^3\,Ns/m$

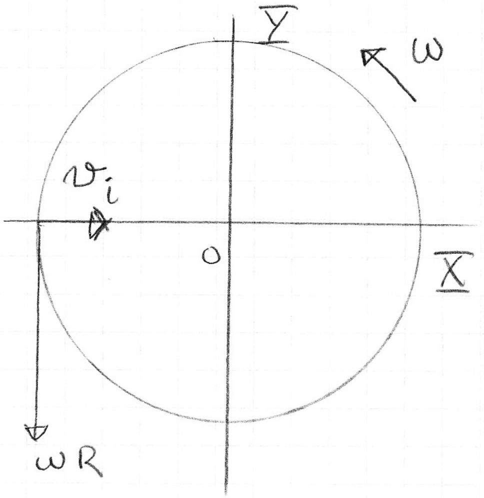
Efter passagen består rörelsen i insvängning mot nytt jämviktsläge:



Anm: En kuriositet: Om rörelseekvationen ovan gäller hela tiden säger termen $b\dot{h}$ oändlig acceleration vid tiden $t=0$. Jag tror att detta antyder en brist hos modellen, men vet för lite om bilar för att säga vari den består.

2) Jag inför inertialsystem $\underline{X}, \underline{Y}$ i vila relativt skivans mittpunkt. (Som skivan roterar kring). Inga horisontella krafter på kulan $\Rightarrow$ kulans hastighet = konstant. Den måste då vara riktad radiellt.

Vi kan välja tid och system så att $(\underline{X}(t), \underline{Y}(t)) = (v_i t, 0)$.



$\underline{v} = \underline{v}_{kula} - \underline{v}_{skiva} = (v_i, R\omega)$

(se fig), bildar vinkel θ med axeln $\hat{\underline{X}}$

$R\omega = v\, s(\theta)$

$v_i = v\, c(\theta)$

a) svar: sökta vinkeln θ ges av $\sin\theta = R\omega/v$, orienterad enl fig.

b) Antag nu $(\underline{X}(t), \underline{Y}(t)) = (-R, 0)$.

skiv fixa koordinater (x, y) ges av

$$x = \underline{X}\, c(\omega t) + \underline{Y}\, s(\omega t)$$

$$y = -\underline{X}\, s(\omega t) + \underline{Y}\, c(\omega t)$$

För kulan: $(x, y) = -R(c(\omega t), s(\omega t))$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = R\omega(s(\omega t), -c(\omega t))$$

$$(\ddot{x}, \ddot{y}) = R\omega^2(c(\omega t), s(\omega t))$$

$\underline{F}_{cor} = -2m\omega\hat{z}\times(\dot{x}, \dot{y}) = -2m\omega(\dot{y}, -\dot{x}) = 2mR\omega^2(c(\omega t), s(\omega t))$

$\underline{F}_{cf} = -m\omega\hat{z}\times(\omega\hat{z}\times(x, y)) = m\omega^2(x, y) = -m\omega^2 R(c(\omega t), s(\omega t))$

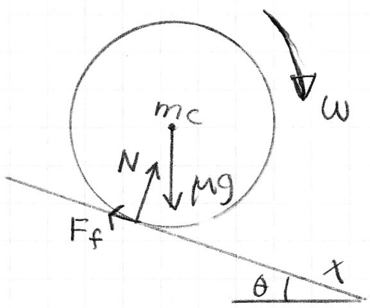
Rörelseekv. $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \underline{F}_{cor} + \underline{F}_{cf}$

stämmer, för $m(\ddot{x}, \ddot{y}) - \underline{F}_{cor} - \underline{F}_{cf}$

$= (mR\omega^2 - 2mR\omega^2 + mR\omega^2)(c(\omega t), s(\omega t)) = 0$.

Lösningsskisser, tentamen i mekanik

del 2 den 11/1 - 2006 .



3) Ingen glidning $\Rightarrow$ $a\omega = \dot{x}$

Rörelselagarna för vridning kring mc och mc's rörelse utför planet är

$$I\dot{\omega} = aF_f, \qquad I = \frac{2}{3}\mu a^2$$

$$\mu\ddot{x} = \mu g\, s(\theta) - F_f .$$

$$0 = \ddot{x} - a\dot{\omega} = g\,s(\theta) - \frac{F_f}{\mu} - a^2\frac{F_f}{I} = g\,s(\theta) - \left(1 + \frac{3}{2}\right)\frac{F_f}{\mu}$$

$$\Rightarrow F_f = \frac{2}{5}\mu g\, s(\theta)$$

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{2}{5}\right) g\, s(\theta) = \underline{\underline{\frac{3}{5} g \sin\theta}}$$

Energimetod: $V = -\mu g x\, s(\theta)$

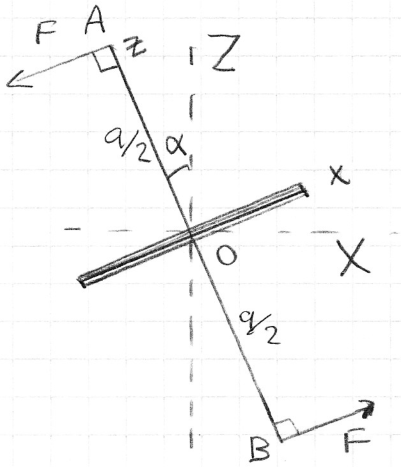
$$E_k = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2\left(1 + \frac{2}{3}\right)$$

$$E = E_k + V = \frac{1}{2}\frac{5}{3}\mu\dot{x}^2 - \mu g x\, s(\theta)$$

Energikonservering: $0 = \dot{E} = \frac{5}{3}\mu\ddot{x}\dot{x} - \mu g\dot{x}\, s(\theta)$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}\ddot{x} - g\,s(\theta) = 0 \qquad \underline{\underline{\ddot{x} = \frac{3}{5} g\, s(\theta).}}$$

4) Använd rörelsemängdsmomentlagen $\dot{\underline{L}} = \underline{N}$ ramfixa koordinater (X, Y, Z) och (x, y, z) enl fig.



$\underline{\omega}_{tot} = \nu \hat{z} + \omega \hat{Z}$

$= (\nu + \omega\, c(\alpha))\, \hat{z} + \omega\, s(\alpha)\, \hat{x}$

$\underline{L} = I_{\parallel} (\nu + \omega\, c(\alpha))\, \hat{z} + I_{\perp}\, \omega\, s(\alpha)\, \hat{x}$

$= L_Z \hat{Z} + L_X \hat{X}$ säg

$L_X = - I_{\parallel}\, \nu\, s(\alpha) - (I_{\parallel} - I_{\perp})\, \omega\, c(\alpha)\, s(\alpha)$

$\dot{\underline{L}} = L_X \dot{\hat{X}} = L_X\, \omega\, \hat{Z} \times \hat{X} = L_X\, \omega\, \hat{Y}$

$\underline{N} = - a F \hat{Y}$

Skivans tröghetsmoment $I_{\parallel} = \frac{1}{2} m r^2 \quad I_{\perp} = \frac{1}{2} I_{\parallel}$

Sökta lagerkraferna enl. fig. med

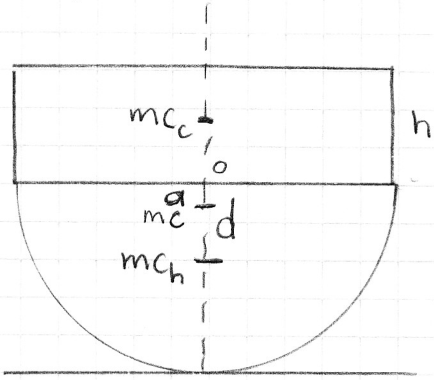
$F = - L_X\, \omega / a =$

$= \frac{1}{2} m r^2 \frac{\omega}{a} \left(\nu\, s(\alpha) + \frac{1}{2} \omega\, c(\alpha)\, s(\alpha) \right)$

5] cylinderns, halvklotets och kroppens massor, masscentra, och tröghetsmoment m.a.p. sina masscentra ges av

$m_c = \pi r^2 h \rho \qquad m_h = \frac{2}{3}\pi r^3 \rho$

$m = m_c + m_h \qquad d = \frac{3}{8} r$



$a = (m_h d - m_c \frac{h}{2})/m = \frac{\pi}{4} r^2 (r^2 - 2h^2)\,\rho/m$

$I_c = m_c(\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{12} h^2)$

$I_h = \frac{83}{320} m_h r^2$

$I = I_c + (h/2 + a)^2 m_c + I_h + (d-a)^2 m_h$

När kroppen vrider sig rör sig mc bara vertikalt (pga inga horisontella krafter), och o bara horisontellt (pga geometrin).

Potentiella energin beror därför av vridningsvinkeln θ enl. $V = -mga\cos\theta$.

För små svängningar gäller $E_K \approx \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$ (Masscentrums hastighet $a \sin\theta\, \dot{\theta}$ ger ett försumbart bidrag till E_K).

Energikonservering ger rörelseekvationen $I\ddot{\theta} + mga\theta = 0$, som ger sökta vinkelfrekvensen $\omega^2 = mga/I$.

$\Rightarrow$ villkor för stabilitet: $a > 0$, dvs $r^2 > 2h^2$.