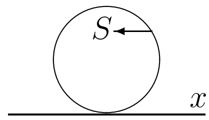
Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 26/8-2006.

1. De 12 påståendena är riktiga (R) respektive felaktiga (F) enligt följande lista:
   FRFR FRFR RRFF

2. Förutsatt att kön inte slinter, så påverkar den bollen med en horisontell stötkraft. Den ger bollen en impuls S i kontaktpunkten. Om bollen är i vila före stöten, så har den alltså rörelsemängd S åt vänster och rörelsemängdsmoment med avseende på sitt masscentrum $(h-a)S$ moturs alldeles efter stöten. Stöten ger inga reaktionskrafter från underlaget eftersom den är horisontellt riktad. Rörelsemängd och rörelsemängdsmoment bestämmer kulans masscentrumhastighet och rotation



$$mv_x = -S,$$
$$I_G\omega = (h-a)S.$$

För att kulan inte skall glida måste hastigheten i kontaktpunkten vara noll

$$v_x + a\omega = 0.$$

Elimination S och v_x mellan dessa tre ekvationer ger ett samband där även ω kan förkortas bort, så att man får

$$(h-a) = I_G/(ma) = (2/5)a.$$

För sista likheten användes uttrycket för homogent klots tröghetsmoment med avseende på masscentrum $I_G = (2/5)a^2$. Sökta höjden är alltså: $h = (7/5)a$.

3. I potentialuttrycket dominerar andra termen när r är litet, och ger då en avtagande funktion av r. För stora r dominerar första termen och medför att potentialen då är en växande funktion av r. Därför har potentialen (minst) ett minimum. Nära minimet kan potentialen approximeras med ett andragradspolynom som beskriver rörelsen i radiell led som harmonisk svängning. Minimipunkten bestäms genom att sätta derivatan av potentialfuntionen till noll. För att bestämma approximativa uttrycket deriverar man sedan ytterligare en gång. Så här:

$$V(r) \approx V(r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)(r-r_0)^2, \qquad \text{där} \qquad V'(r_0) = 0.$$
$$V'(r) = \frac{mMG}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}; \qquad r_0 = \frac{L^2}{m^2MG};$$
$$V''(r)|_{r=r_0} = -\frac{2mMG}{r_0^3} + \frac{3L^2}{mr_0^4} = \frac{mMG}{r_0^3}.$$

Enligt formler för vinkelfrekvens och svängningstid vid harmonisk svängning har man

$$\omega^2 = V''(r_0)/m; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{MG}}.$$

Detta är precis samma uttryck som det för omloppstiden. Det betyder att efter varje varv återkommer planeten, i denna approximation åtminstone, precis till utgångspunkten.

4. Ett sätt att räkna oberoende banparametrar är följande. Kometen är en partikel i tre dimensioner. Rörelseekvationernas lösning innehåller därför sex integrationskonstanter, dvs sex oberoende parametrar. Två av dessa bestämmer banans plan. Vi vet att banan är en ellips i detta plan. Storaxelns riktning är en parameter, kometens position i banan vid tiden noll en annan. Alltså behövs två oberoende parametrar till för att bestämma rörelsen fullständigt.
   Av de fem uppgifterna i texten handlar en om banplanets orientering. Den är oberoende av de andra uppgifterna. De fyra andra uppgifterna handlar om banans form och storlek och om hastigheten. De är oberoende av banans orientering och av positionen i banan vid tiden noll. Därför beror de bara av de två sista oberoende parametrarna i stycket ovan. Svaret på första frågan är alltså tre.
   Och det blir 5-3=2 oberoende samband att kontrollera. Detta kan förstås göras på flera olika sätt. Till exempel bestäms både excentriciteten e och omloppstiden T av största och minsta avståndet, $r_{\max}$ och $r_{\min}$. Sambanden kan tex skrivas

$$\begin{aligned} r_{\max} + r_{\min} &= 2a, \\ r_{\max} - r_{\min} &= 2ae, \qquad\qquad M_{\odot}G(T/2\pi)^2 = a^3. \end{aligned}$$

   När man kontrollerar dem kan det vara lämpligt att försöka uttrycka den kvantitet som angivits med minst noggrannhet, eller den som är minst känslig för fel i de övriga parametrarna, i de övriga parametrarna. De två första sambanden ger

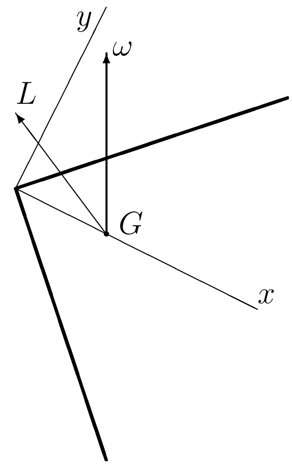
$$1 - e = 2(r_{\min}/r_{\max})/(1 + r_{\min}/r_{\max}).$$

   De givna uppgifterna ger högerledet med 3 siffrors noggrannhet, men vänsterledet med bara 2. Därför använder jag sambandet till att bestämma excentriciteten. Resultatet blir $e = 0.9672$, i utmärkt överensstämmelse med den givna uppgiften $e = 0.967$.
   Den sista ekvationen, Keplers tredje lag, använder jag till att beräkna a från T. Resultatet är $a = 17.81$ AU, att jämföra med $a = 17.84$ AU, som första ekvationen ger. Även här är överensstämmelsen god. Om man antar att alla givna numeriska värden är rätt avrundade, så ligger gränsen där man skulle börja oroa sig för att siffrorna inte passar ihop ungefär vid 7 enheters skillnad i sista siffran.
   Ett alternativt sätt att kontrollera Keplers tredje lag för kometen är att dividera den med Keplers tredje lag för jorden. Man uttnyttjar då att de givna sifferuppgifterna förutsätts konsistenta med Keplers tredje lag för jorden. Detta sätt är numeriskt lättvindigare:

$$(T/T_{\oplus})^2 = (a/a_{\oplus})^3; \qquad (\frac{1}{2}(35.1 + 0.586))^3/75.3^2 = 1.002$$

5. Jag börjar med specialfallet $a = b$, och inför ett koordinatsystem sådant att kroppens vinkel ligger i origo, och de bägge skänklarna i riktningarna $\hat{x} + \hat{y}$ och $\hat{x} - \hat{y}$, se nästa sida. Det är valt så att tröghetstensorn, pga kroppens symmetriska läge, är diagonal i detta koordinatsystem. De bägge skänklarnas masscentra ligger mitt på skänklarna, i $(1, \pm 1)a/\sqrt{8}$, och hela kroppens masscentrum mitt emellan dem, i $(1, 0)a/\sqrt{8}$. Kroppen är invariant under spegling i xy-planet. Därför är deviationsmomenten I_{xz} och I_{yz} noll. Den är också invariant under spegling i x-axeln. Därför är också I_{xy} noll. Dessa symmetriargument fungerar lika bra för tröghetstensorn med avseende på masscentrum som för tröghetstensorn med avseende på origo. Från definitionen av tröghetsmoment finner vi hu-

vudtröghetsmomenten med avseende på masscentrum



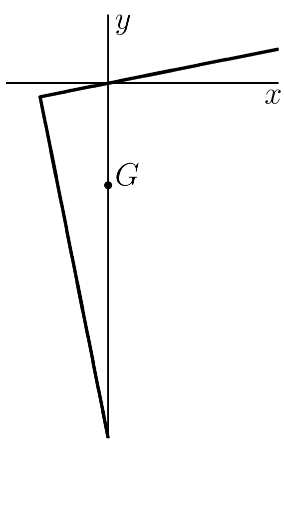
$$I_{\mathrm{G}xx} = 2\varrho \int_0^a (\ell/\sqrt{2})^2 \, d\ell = \varrho a^3/3,$$

$$I_{\mathrm{G}yy} = 2\varrho \int_{-a/2}^{a/2} (\ell/\sqrt{2})^2 \, d\ell = \varrho a^3/12.$$

Eftersom kroppen ligger i ett plan är det tredje huvudtröghetsmomentet $I_{\mathrm{G}zz} = I_{\mathrm{G}xx} + I_{\mathrm{G}yy} = \varrho a^3 5/12$. Eftersom alla huvudtröghetsmomenten är olika så finns inga andra huvudtröghetsaxlar än $\hat{x}, \hat{y}$, och $\hat{z}$. Svaret på första frågan är alltså nej, åtminstone när $a = b$. Man kan också dra slutsatsen att svaret i allmänhet är nej också när $a \neq b$.
Nu antas kroppen rotera kring axeln genom nedre skänkelns spets och masscentrum. Det betyder att rotationsvektorn pekar i riktningen $(1,0)a/\sqrt{8} - (1,-1)a/\sqrt{2} = (-1,2)/\sqrt{8}$. Den kan då skrivas $\vec{\omega} = (-1,2)\omega/\sqrt{5}$. Kroppens rörelsemängdsmoment kan nu beräknas

$$\vec{L} = (I_{\mathrm{G}xx}\omega_x, I_{\mathrm{G}yy}\omega_y) = (-2,1)\frac{\varrho a^3 \omega}{6\sqrt{5}}.$$

Det är beräknat med avseende på masscentrum, men eftersom masscentrum inte rör sig är det oberoende av momentpunkten. Om kroppen fortsätter att rotera kring sitt masscentrum med rotationsvektorn $\vec{\omega}$, vars riktning är konstant både i rummet och relativt kroppen, så kommer rörelsemängdsmomentet $\vec{L}$ att vara fixt relativt kroppen, dvs rotera med vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ i rummet. Då kräver rörelsemängdsmomentlagen att kroppen påverkas av ett kraftmoment $\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{L}$. Rörelsemängdsmomentets storlek är $L = a^3\omega/6$, och dess vinkel θ mot vertikalen i figuren kan bestämmas genom skalärmultiplikation med rotationsvektorn, med resultatet $\cos(\theta) = 4/5$, $\theta \approx 37°$.
Anm 1: En alternativ och mer systematisk metod, som fungerar även när man inte hittar några symmetriargument, är att först beräkna tröghetstensorn i något lämpligt ortogonalt koordinatsystem. Sedan kan man bestämma dess egenvärden och den ortogonala transformation (=rotation) som gör den diagonal. Hur detta görs förklaras i kursen i lineär algebra.
Anm 2: Att axeln genom masscentrum och ena skänkelns spets inte är en huvudtröghetsaxel för något värde på a/b kan man se så här. Kriteriet för att den skall vara det är att $I_{xy} = 0$ i koordinatsystem med $y-$axel = rotationsaxeln, se figuren. Origo kan väljas var som helst på rotationsaxeln. Enligt definitionerna av tröghetstensor och masscentrum gäller

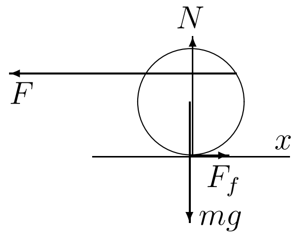


$$I_{xy} = -\Sigma_i m_i x_i y_i; \qquad 0 = \Sigma_i m_i x_i.$$

Summorna är över alla masspunkter (=atomer) som kroppen består av. Att I_{xy} inte beror av var på rotationsaxeln man väljer origo är lätt att se också algebraiskt. Flyttning av origo innebär addition av andra ekvationen, multiplicerad med flyttsträckan. Jag väljer skärningspunkten med övre skänkeln till origo. Då ser man medsamma att $I_{xy} < 0$, för alla termer i summan är ≤ 0.

2. Alternativ lösning till uppgift 2, inspirerad av studenternas. Antag att vinkelhastigheten moturs är ω, stötkraften F, normalkraft och friktionskraft från underlaget N och F_f, samt friktionskoefficient mot underlaget μ. Biljardbollens rörelseekvationer, villkoret för ingen glidning mot underlaget, friktionslagen, samt tröghetsmoment med avseende på masscentrum kan skrivas

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_f - F, \\
0 &= N - mg, \\
I_G\dot{\omega} &= (h-a)F + aF_f \\
\ddot{x} &= -a\dot{\omega}, \\
|F_f| &\leq \mu N, \\
I_G &= 2a^2/5.
\end{aligned}
$$



Vi använder 4 av dessa ekvationer till att eliminera de 4 kvantiteterna $I_G, N, \dot{\omega}, \ddot{x}$. Då återstår en olikhet och en ekvation som kan skrivas

$$
\begin{aligned}
|F_f| &\leq \mu mg \\
(7a/5 - h)F &= (7a/5)F_f.
\end{aligned}
$$

Stöt innebär mycket stor kraft F under mycket kort tid. Friktionskraften är däremot begränsad av olikheten, till att vara inte mycket stor. Den sista ekvationen är därför vanligen inte uppfylld. Det som då händer är att kulan glider, så att en av de ekvationer vi startade med var fel. Undantaget är om $|7a/5 - h|$ är tillräckligt litet. Hur litet beror av bl a F och μ. För att ekvationen skall vara uppfylld för alla μ (även $\mu = 0$) måste man ha $h = 7a/5$. Detta är alltså det rätta svaret på uppgiften.
Ett svar sådant som $h = (7a/5)(1 - F_f/F)$ är fel, därför att det inte svarar på frågan i uppgiftstexten, eftersom F_f inte är oberoende av friktionskoefficienten utan begränsad av friktionslagen.