Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 30/8-2007.

1. Av de 4 svarsalternativen till varje delfråga, numrerade i ordningsföljd, är följande nummer rätt: a) 3, b) 3, c) 2, d) 1, e) 4, f) 3, g) 2, h) 2.

2. Jag kallar koordinaterna (x, y, z). Massfördelningen är oförändrad efter rotation halvt varv kring z-axel, dvs efter transformationen $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$. Härav följer att z-axeln är en huvudtröghetsaxel, och att de två andra ligger i xy-planet. Det är inte svårt att räkna ut tröghetsmatrisen (med avseende på origo). Tex $I_{yy} = \Sigma_{\nu=1}^{4} m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2) = \mu a^2(3+3+2+2+1+1+1+1) = 14\mu a^2$, $I_{xy} = -\Sigma_{\nu=1}^{4} m_\nu x_\nu y_\nu = -\mu a^2(2+2) = -4\mu a^2$. Tröghetsmatrisen blir
$$I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} 2\mu a^2.$$
Allmänt gäller att om vinkelhastigheten pekar i en huvudtröghetsaxelriktning så är rörelsemängdsmomentet riktat som vinkelhastigheten, och propotionellt mot den, och huvudtröghetsmomentet I är propotionalitetskonstant. Detta faktum ger ett ekvationssystem som kan användas för att beräkna huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment. Dvs man har
$$\sum_b I_{ab}\omega_b = I\omega_a \quad \text{som fordrar} \quad \det(I_{ab} - \delta_{ab} I) = 0.$$
I vårt fall är $\hat{z}$ huvudtröghetsaxel, med huvudtröghetsmomentet $I_{zz} = 14\mu a^2$. De två andra huvudtröghetsaxlarna måste ligga i xy-planet, så för att bestämma dem räcker det att titta på övre vänstra 2 x 2 - undermatrisen av I_{ab}. Determinantekvationen har två lösningar, $I_1 = 6\mu a^2$ och $I_2 = 16\mu a^2$, som alltså är de två återstående huvudtröghetsmomenten. För var och en av dem kan ekvationssystemet användas till att bestämma riktningen av ω. Man finner tex för $I = I_1$ $\omega_x = 2\omega_y$, som ger huvudtröghetsaxelriktningen $\hat{\omega}_1 = (2\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{5}$. På samma sätt finner man den andra huvudtröghetsaxelns riktning $\hat{\omega}_2 = (-\hat{x} + 2\hat{y})/\sqrt{5}$.
Några rimlighetskontroller: Huvudtröghetsaxlarna är ortogonala.
Om vi projicerar huvudtröghetsaxlar och masspunkter i xy-planet, dvs vi ser på systemet från en punkt långt borta på tredje huvudtröghetsaxeln, så delar de andra två huvudtröghetsaxlarna in xy-planet i fyra kvadranter. Man ser då att det ligger en masspunkt i varje kvadrant. Detta är bra. Om två kvadranter blivit utan masspunkter kunde man misstänkt att huvudtröghetsaxlarna blivit felberäknade.

3. Lösning med hjälp av rörelseekvationer: Man frilägger lämpligen minst tre delar av systemet. Låt y, y', ω, ω' vara vertikala koordinater för klossarna och morurs vinkelhastigheter för vänstra och högra trissan respektive. Eftersom snöret är otänjbart och inte slirar på trissorna har man tvångsrelationer mellan dem: $\dot{y}' = a\omega' = -2a\omega = -2\dot{y}$. Därför har systemet bara en oberoende frihetsgrad. Låt T_1, T_2, T_3, vara spänningarna i snörets vänstra, mellersta, och högra vertikala del, respektive. Vi kan nu ställa upp följande rörelseekvationer:
$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{y} &= T_1 + T_2 - (m+M)g, \\ I\dot{\omega} = (I/a)\ddot{y} &= a(T_2 - T_1), \\ I\dot{\omega}' = -2(I/a)\ddot{y} &= a(T_2 - T_3), \\ M'\ddot{y}' = -2M'\ddot{y} &= T_3 - M'g, \end{aligned}$$

där tröghetsmomentet för homogen cirkelskiva är $I = ma^2/2$. Vi adderar dessa ekvationer på sådant sätt att snörspänningarna kancellerar, dvs vi adderar ekvationerna multiplicerade med 1, $1/a$, $-2/a$, -2, respektive. Resultatet blir rörelseekvationen

$$(m + M + m/2 + 4m/2 + 4M')\ddot{y} = (-m - M + 2M')g.$$

Härav följer svaret till frågan i uppgiften, se nedan.
Lösning med hjälp av energilagen: När, som här, systemet har bara en frihetsgrad behövs bara en rörelseekvation och den kan man hitta med hjälp av energilagen. Sammanlagda energin pga translationsrörelse, rotation, och gravitation är

$$\begin{aligned} E &= \Sigma(\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh) = \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}ma^2(\frac{\dot{y}}{a})^2 + \frac{1}{2}ma^2(\frac{2\dot{y}}{a})^2 + (m+M)\dot{y}^2 + M'(2\dot{y})^2] + (M+m)gy + M'g(-2y) = \\ &= \frac{1}{2}(\frac{5}{2}m + M + 4M')\dot{y}^2 + (m + M - 2M')gy. \end{aligned}$$

Denna energi är konserverad, så $\dot{E} = 0$. Tidsderivatan av högerledet innehåller en faktor $\dot{y}$. Dividerar vi med den får vi ekvationen

$$0 = (\frac{7}{2}m + M + 4M')\ddot{y} + (m + M - 2M')g.$$

Den ser ut som en rörelseekvation, och måste vara den vi söker, eftersom det bara finns en. Härledningen av den är invändningsfri om $\dot{y}$ är nollskild. Men ekvationen måste gälla även när $\dot{y} = 0$, eftersom man i så fall kan göra $\dot{y}$ är nollskild genom att ändra startvillkoren, utan att ändra rörelseekvationen.
Svar: Vänstra klossens acceleration uppåt är $\ddot{y}$, den högras $-2\ddot{y}$, med

$$\ddot{y} = \frac{2M' - m - M}{4M' + \frac{7}{2}m + M}g.$$

Anm: Man kan göra flera rimlighetskontroller av svaret. Man kan tex övertyga sig om att det stämmer i de förenklade fallen när bara en av massorna är nollskild, eller att jämvikt är möjlig när täljaren är noll.

4. Först ser jag på precessionsrörelsen före stöten. Beteckningar: $\hat{Z}=$ vertikal uppåtriktad enhetsvektor. $\hat{z}=$ horisontell enhetsvektor som pekar i snurrans axels riktning från upp hängningspunkten mot skivan. $s=$ snurrans spinn. Snurrans vinkelhastighet ω, rörelsemängdsmoment L, och rörelsemängdsmomentekvationen $\dot{L} = M$ kan nu tecknas. Den sista ger ett uttryck för s.

$$\begin{gathered} \vec{\omega} = \Omega\hat{Z} + s\hat{z}, \\ \vec{L} = m(\ell^2 + a^2/4)\Omega\hat{Z} + m(a^2/2)s\hat{z}, \\ \dot{\vec{L}} = \Omega\hat{Z} \times \vec{L} = m(a^2/2)s\Omega\vec{Z} \times \vec{z} = \vec{M} = \ell\vec{z} \times (-mg\hat{Z}), \\ s = (2\ell g)/(a^2\Omega). \end{gathered}$$

Därmed är snurrans rörelsetillstånd före stöten bestämt. Stöten ger ett rörelsemängdsmomenttillskott. Det nya rörelsemängsmomentet L' och motsvarande vinkelhastighet ω' beräknas:

$$\begin{aligned} \vec{L}' = \vec{L} + \ell\hat{z} \times (-K\hat{Z}) &= m(\ell^2 + a^2/4)\Omega\hat{Z} + m(a^2/2)s\hat{z} + \ell K\vec{Z} \times \vec{z}, \\ \vec{\omega}' &= \Omega\hat{Z} + (2\ell g)/(a^2\Omega)\hat{z} + (\ell K)/(m(\ell^2 + a^2/4))\vec{Z} \times \vec{z}. \end{aligned}$$

Sista raden är det sökta rotationsvektoruttrycket. Observera att vektorerna $\hat{Z}$, $\hat{z}$, $\vec{Z} \times \vec{z}$ bildar en högerorienterad bas.

5. Jag kallar partikelns starthastighet v_0. Den bildar alltså 45° vinkel mot jordytan. Om man tänker sig att jorden är platt, och accelerationen $-g\hat{z}$, så blir banan en parabel, högsta höjden $h_p = v_0^2/(4g)$, och flygsträckan $s = 4h_p$. Vi väljer därför starthastigheten så att $v_0^2 = gs$.
Så startar vi partikeln på samma sätt men beräknar rörelsen med Keplers lagar i stället. Då kommer avståndet till nedslagsplatsen, s_p, att skilja sig lite från s. Det finnes flera orsaker till korrektioner. Avståndet mäts nu utefter den krökta jordytan. Banans form är annorlunda. Högsta höjden blir större eftersom större andel av kinetiska energin omvandlas till potentiell, och eftersom gravitationen avtar med höjden. I räkningen som följer beräknas först den nya högsta höjden, h. Därefter den nya banan.
Energi- och rörelsemängsmoment-konseveringslagarna ger, med v_m = hastigheten i banans högsta punkt, M = jordens massa, R = jordens radie:

$$-\frac{MG}{R} + \frac{v_0^2}{2} = -\frac{MG}{R+h} + \frac{v_m^2}{2}, \qquad \frac{Rv_0}{\sqrt{2}} = (R+h)v_m.$$

v_m elimineras med hjälp av rörelsemängdsmomentekvationen. Energiekvationen innehåller kvantiteter av mycket olika storlek. Det kan vara lämpligt att klumpa ihop termer som nästan kancellerar. Jag definierar en liten dimensionslös parameter $x \equiv h/(R+h)$ och räknar på,

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R}{R+h}v_0 = (1-x)\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{1}{2}(v_0^2 - v_m^2) = \frac{MG}{R} - \frac{MG}{R+h} = \frac{MG}{R}x;$$
$$x = \frac{R}{2MG}(v_0^2 - v_m^2) = \frac{Rv_0^2}{4MG}(2-(1-x)^2) \equiv a(2-(1-x)^2) = a(1+x-x^2) \approx a + a^2.$$

Här har jag infört en ny dimensionslös liten parameter $a = (Rv_0^2)/(4MG) = v_0^2/(4gR)$. Sedan har jag uttryckt x i a korrekt till ordning a^2. Detta uttryck beskriver den elliptiska banans höjd h. Denna högre höjd ger längre sträcka. Men vi måste också undersöka hur banans form påverkar sträckan. Vi vet att banan är ellips. Om högsta höjden, $R+h$, inträffar när banvinkelvariabeln $\theta = 0$, så kan banekvationen skrivas

$$r(\theta) = \frac{(R+h)(1-e)}{1 - e\cos\theta}.$$

Banans vinkel mot jordytan är 45° vid start och nedslag, dvs

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{-e\sin\theta}{1-e\cos\theta} = \pm 1, \quad \text{när} \quad \begin{cases} \theta = \mp\theta_0 \\ r = R \end{cases}.$$

Detta innebär två samband mellan θ_0, h, R och e,

$$1 - e\cos\theta_0 = e\sin\theta_0, \qquad 1 - e\cos\theta_0 = (1 + h/R)(1-e).$$

Vi eliminerar e, och skriver om ekvationen med målet att kombinera termer som nästan kancellerar när θ_0 är mycket litet.

$$\sin\theta_0 = (1 + \frac{h}{R})(\sin\theta_0 + \cos\theta_0 - 1); \qquad \frac{1-\cos\theta_0}{\sin\theta_0} = \frac{h}{h+R} = x.$$

Nu har vi alla ekvationer vi behöver. Vi löser dem approximativt genom potensserieutveckling

$$x = \theta_0/2 + \theta_0^3/24 + o(\theta_0^5);$$
$$\theta_0 = 2x - (2/3)x^3 + 0(x^5) = 2a(1 + a^2) + o(a^3).$$

slutligen har vi sträckan utefter jordytan mellan start och landning, när a^3-termer försummas, $s_p = 2R\theta_0 = 4Ra(1 + a) = s(1 + a)$. Så $\delta = a = v_0^2/(4gR) = s/(4R)$, och efterfrågade maximala sträcka $s = 4R\delta$. Sammanfattningsvis, går man igenom räkningarna ser man att höjdökningen orsakas till lika delar av ökad andel omvandlad kinetisk energi och minskad gravitationskraft, och ger en ökning av flygsträckan som reduceras till hälften av ändringarna i jordytans och banans form.