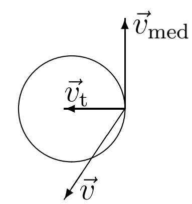
Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 26/8-2008.

1. a) Kraft: kg m/s^2, energi: kg m^2/s^2, impuls: kg m/s, tröghetsmoment: kg m^2, rörelsemängdsmoment: kg m^2/s.
   b) Lutningsvinkel 7.1 grader.
   c) Ortsvektor $\vec{R} = (a^2\hat{x} + b^2\hat{y} + c^2\hat{z})/(2(a+b+c))$.
   d) Tröghetsmatrisen är en diagonalmatris: $I = (2\rho/3)\mathrm{diag}(b^3+c^3, c^3+a^3, a^3+b^3)$.

2. Jag inför ett cartesiskt inertialsystem (X, Y, Z) med Z-axel utefter skivans vertikala rotationsaxel, samt ett koordinatsystem (x, y, z) fixerat i skivan, och med z-axel sammanfallande med Z-axeln. Hastigheten hos en punkt $\vec{r}$ på skivan är $\vec{v}_{\text{med}} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, där $\vec{\Omega} = \Omega\hat{Z}$ är skivans rotationsvektor.

   a) För att passera skivans mittpunkt måste kulan ha hastighet relativt inertialsystemet, $\vec{v}_t = \vec{v} + \vec{v}_{\text{med}}$ riktad mot skivans centrum. De tre hastighetsvektorerna bildar en triangel med rät vinkel mellan $\vec{v}_t$ och $\vec{v}_{\text{med}}$ och $\vec{v}$ pekande i den sökta riktningen. Den kan beskrivas av att den bildar en vinkel α med $\vec{v}_t$, där $\sin\alpha = v_{\text{med}}/v = \omega R/v$.



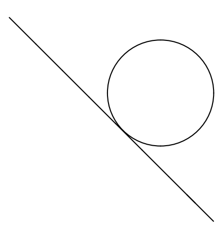
   b) Man kan välja systemens orientering så att kulans ortsvektor är

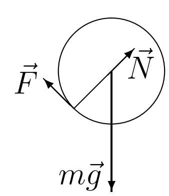
$$\vec{r}(t) = R\hat{X} = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = R(\cos(\Omega t)\hat{x} - \sin(\Omega t)\hat{y}).$$

   Observera minustecknet som krävs för att stämma med den antagna rotationsrörelsen. Erforderliga storheter beräknas:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\text{rel}} &= \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = -R\Omega(\sin(\Omega t)\hat{x} + \cos(\Omega t)\hat{y}),\\
m\vec{a}_{\text{rel}} &= m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}) = -m\Omega^2\vec{r},\\
\vec{F}_{\text{ce}} &= -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = m\Omega^2\vec{r},\\
\vec{F}_{\text{co}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} &= 2mR\Omega^2\hat{Z} \times (\sin(\Omega t)\hat{x} + \cos(\Omega t)\hat{y}) = -2m\Omega^2\vec{r}.
\end{aligned}$$

   Med dessa uttryck kollar man lätt att rörelseekvationen $m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F}_{\text{co}} + \vec{F}_{\text{ce}}$ är uppfylld.





3. Beteckningar: Planets lutningsvinkel α. Skalets radie a. Skalets massa m. Skalets tröghetsmoment med avseende på masscentrum $I = (2/3)ma^2$. x = koordinat som anger hur långt masscentrum rört sig utför planet. ω = skalets vinkelhastighet, positiv för rullning utför planet. N = normalkraften från planet på skalet. F = friktionskraften på skalet från planet. Rörelseekvationerna för skalets rotation kring masscentrum, för dess translationsrörelse utför planet, samt jämviktsekvationen i riktningen vinkelrätt mot planet är, respektive:

$$\begin{aligned}
I\dot{\omega} &= aF,\\
m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - F,\\
N &= mg\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Nu har vi två fall som måste behandlas var för sig, (a) skalet rullar utan att glida, och (b) skalet både rullar och glider.

I fall (a) har vi ett tvångssamband mellan x och ω: $\dot{x} = a\omega$. (Dessutom ger friktionslagen en relation mellan F och N: $F \leq \mu N$.) De två rörelseekvationerna kombineras till en ekvation utan F och ω elimineras ur den med hjälp av tvångssambandet. Resultatet blir en ekvation som ger ett uttryck för accelerationen i fall (a):

$$\ddot{x}_{(a)} = mg\sin\alpha/(m + I/a^2) = (3/5)g\sin\alpha.$$

I fall (b) har vi inget tvångssamband, men i stället ger friktionslagen i detta fall en ekvation, $F = \mu N$. Den bestämmer tillsammans med jämviktsekvtionen ovan friktionskraften till $F = \mu mg\cos\alpha$, och rörelseekvationerna ger acceleration och vinkelacceleration

$$\ddot{x}_{(b)} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad \dot{\omega}_{(b)} = aF/I = (3\mu g/2a)\cos\alpha.$$

Det återstår att avgöra när det ena eller andra fallet inträffar. I fall (a) måste friktionskoefficienten vara tillräckligt stor för att förhindra glidning. Eftersom vi nu känner accelerationen kan vi beräkna friktionskraften ur rörelseekvationen och kolla friktionsrelationen. $\mu \geq F/N = (\sin\alpha - (3/5)\sin\alpha)/\cos\alpha = (2/5)\tan\alpha$.

I fall (b) förutsätts skalet glida utför planet. Vi kan kolla om skalets kontaktpunkts acceleration utför planet enligt vår beräkning verkligen är positiv. $0 < \ddot{x} - a\dot{\omega} = \ddot{x} - a^2F/I = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - (3/2)\mu\cos\alpha)$. Detta kan skrivas $\mu < (2/5)\tan\alpha$. Observera att kriterierna för de två faller är komplementära. Det ger en räknekontroll. Det är förresten enkelt men ändå meningsfullt att dimensionskontrollera slut-ekvationerna och -relationen

4. Kroppens tröghetsmoment med avseende på masscentrum är, för symmetriaxeln $I_\parallel = mr^2$, och för axlar vinkelräta mot symmetriaxeln $I_\perp = m(r^2 + \ell^2)/2$. Eftersom inget yttre kraftmoment med avseende på masscentrum verkar på kroppen så måste den röra sig så att rörelsemängdsmomentet är konstant. Jag inför ett rumsfixt cartesiskt koordinatsystem (X, Y, Z) så att rörelsemängdsmomentet pekar i Z-riktningen, $\vec{L} = L\hat{Z}$. Z-riktningen definierar den rumsfixa axel som nämns i tesen. (Man kan tänka sig att $\hat{Z}$ pekar vertikalt uppåt.) Om man vill kan man begränsa sig till fallet $L > 0$, för när det är avklarat kan man lätt gå till fallet $L < 0$ genom att ändra tecknet på L och på alla rotationsvektorer. Jag inför också ett rörligt cartesiskt koordinatsystem (x, y, z) sådant att kroppens symmetriaxel pekar i riktning $\hat{z}$, och sådant att $\hat{y}$ alltid ligger i det plan som spänns av $\hat{Z}$ och $\hat{z}$, dvs $\hat{Z} = \hat{z}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$, där θ är vinkeln mellan rörelsemängdsmoment och symmetriaxel. Kroppens rotationsvektor måste också ligga i detta plan, och brukar skrivas som spin plus precession så här $\vec{\omega} = s\hat{z} + \Omega\hat{Z}$. Observera att man kan byta tecknet på symmetriaxelriktningen, $\theta \to \pi - \theta$, utan att ändra den fysiska situationen om man samtidigt byter tecknet på s. Därför kan vi, om vi vill, begränsa oss till $\cos\theta > 0$ eller till $s > 0$, men vi kan inte göra bägge begränsningarna samtidigt. Vi uttrycker nu rörelsemängdsmoment i rotation och tröghetsmoment, och får ett samband mellan våra parametrar från villkoret att rörelsemängdsmomentet skall peka i riktning $\hat{Z}$.

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= (s + \Omega\cos\theta)\hat{z} + \Omega\sin\theta\hat{y}, \\
\vec{L} &= I_\parallel(s + \Omega\cos\theta)\hat{z} + I_\perp\Omega\sin\theta\hat{y} = \\
&\qquad L\hat{Z} = L\hat{z}\cos\theta + L\hat{y}\sin\theta. \\
\Rightarrow \qquad & I_\parallel(s + \Omega\cos\theta)/(L\cos\theta) = I_\perp\Omega\sin\theta/(L\sin\theta).
\end{aligned}$$

Av de två olika uttrycken för impulsmomentet följer att $L = I_\perp \Omega$, och därmed $\vec{L} = I_\perp \vec{\Omega}$. Precessionen uttryckt i övriga parametrar blir

$$\Omega = \frac{I_\parallel}{(I_\perp - I_\parallel)} \frac{s}{\cos\theta} = \frac{2r^2 s}{(\ell^2 - r^2)\cos\theta}.$$

Av detta uttryck följer bland annat att om axlarna definierats så att $\theta < \pi/2$ och om $\ell < r$ så att $I_\perp < I_\parallel$, då har spin och precession motsatta tecken. Det beror på att i detta fall bildar $\vec{\omega}$ större vinkel med symmetriaxeln än $\vec{L}$, så att vektorerna $\vec{\omega}$ och $\hat{z}$ ligger på var sin sida om $\vec{L}$. När $\vec{\omega}$ då uttrycks som summan av precession och spin, dvs en vektor i riktning som $\vec{L}$ och en i riktning $\hat{z}$, då blir koefficienten för den senare, dvs spinnet, negativt om precessionen är positiv.

Sammanfattningsvis, för en axelsymmetrisk stel kropp som inte påverkas av yttre kraftmoment pekar precessionsvektorn alltid som rörelsemängdsmomentet. Spinnet däremot kan ha olika tecken beroende på tecknet på $\cos\theta$ (dvs symmetriaxelns och spinnets definition), samt på tecknet på $I_\perp - I_\parallel$.

5. Banans största avstånd från jordens centrum, $R + h$, kallar jag r, och hastigheten då, som är horisontell, betecknas v. Energi- och rörelsemängdsmomentkonserveringslagarna ger två ekvationer som bestämmer r och v.

$$L/m = Rv_0 \cos\alpha = rv,$$
$$E/m = v_0^2/2 - \gamma/R = v^2/2 - \gamma/r.$$

Jag löser v ur första ekvationen och sätter in i den andra. Sedan multiplicerar jag med $r^2/(R\gamma)$, och ersätter $v_0^2 R/(2\gamma)$ med parametern x som definierades i tesen. Det blir en andragradsekvation för r/R. Jag löser den och serieutvecklar lösningen till lineär ordning i x.

$$(1-x)(r/R)^2 - r/R + x\cos^2\alpha,$$
$$\frac{r}{R} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(1-x)x\cos^2\alpha}}{2(1-x)} \approx \frac{1 + 1 - 2x\cos^2\alpha}{2(1-x)} \approx 1 + x\sin^2\alpha.$$

För små hastigheter är x liten och approximationen god, och resultatet kan skrivas $h \equiv r - R = Rx\sin^2\alpha = v_0^2 \sin^2\alpha/(2g)$, det välkända resultatet som gäller när gravitationsaccelerationen är konstant och jorden platt.

Approximationen bör vara god när $x << 1$. I det numeriska exemplet är $x \approx (8000)^2/(2 \cdot 10 \cdot 6400000) = 1/2$, inte så liten, och "exakta" och approximativa uttrycken ger $x = 0.5121$, $h = 0.9123R = 581$ mil, respektive $h \approx Rx\sin^2\alpha = 0.384R = 245$ mil.