Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 24/5-2005.

1. S F F F   S F F S

2. Antag att strömningen är laminär, och att partikeln rör sig på x-axeln i ett koordinatsystem med origo i jämviktspunkten. Då är rörelseekvationen

$$\ddot{x} = -\frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = -2\zeta\omega_n\dot{x} - \omega_n^2 x.$$

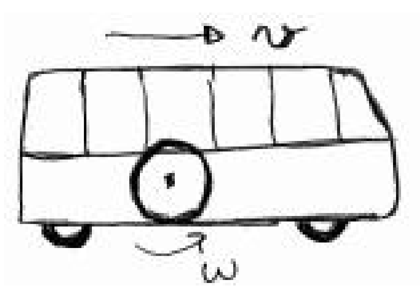
Dämpfaktorn blir $\zeta = \frac{6\pi\eta r}{m2\omega_n} = 3\pi\eta r/\sqrt{mk} = 3\pi{\cdot}1.5{\cdot}10^{-3}{\cdot}0.8{\cdot}10^{-2}/\sqrt{10^{-2}\cdot 0.5} = 1.60{\cdot}10^{-3}$. (Dimensionskoll: $1 = [\zeta] = [\eta r/\sqrt{mk}] = \frac{M}{LT}L/\sqrt{M\frac{F}{L}} = \frac{M}{T}/\sqrt{\frac{MML}{TTL}} = 1$). Eftersom dämpfaktorn är mycket mindre än ett är rörelsen nästan odämpad harmonisk svängning, dvs nästan på formen

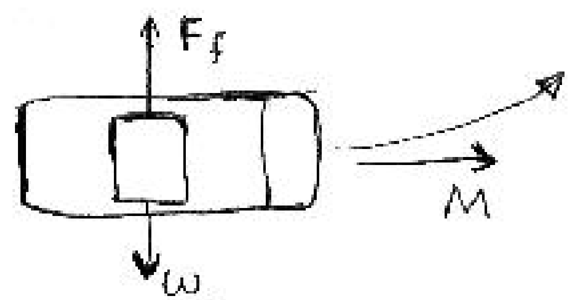
$$x(t) = A\sin(\omega_n t - \varphi), \qquad \dot{x}(t) = A\omega_n\cos(\omega_n t - \varphi).$$

Den kritiska hastigheten, v_c, som inte skall överskridas för att ovanstående beskrivning av rörelsen skall vara en god approximation motsvarar reynoldstalet 30. Motsvarande största amplitud är

$$A = \frac{v_c}{\omega_n} = \frac{30\eta}{\rho d}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{30\cdot 1.5\cdot 10^{-3}}{10^3\cdot 1.6\cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{10^{-2}}{0.5}} = 4\cdot 10^{-4} = 0.4\,\text{mm}.$$

Dimensionskontroll: $[\frac{\eta}{\rho d}\sqrt{\frac{m}{k}}] = \frac{M}{LT(M/L^3)L}\sqrt{M\frac{TTL}{ML}} = L.$





3. Svängning med krökningsradie R vid fart v kräver friktionskraft $F_f = m_b v^2/R$ på hjulen från vägbanan, som ger kraftmoment $M = h_G m_b v^2/R$ med avseende på bussens masscentrum, riktat enligt figuren. (h_G är bussens masscentrums höjd över vägbanan.) För att bussen inte skall välta måste vanligen kraftmomentsumman vara 0. M kompenseras då av momentet orsakat av att normalkrafterna på hjulen från vägbanan är större på ytterhjulen än innerhjulen i kurvan. Men, om det finns ett gyro i bussen skall kraftmomentsumman inte vara noll, utan lika med tidsderivatan av gyrots rörelsemängdsmoment. Om gyrot sitter som i figuren ser man att denna är riktad som M, och därför minskar normalkrafternas moment. Om svänghjulet har vinkelhastighet ω, massa m_h, tröghetsradie k, tröghetsmoment $I = m_h k^2$, så är rörelsemängdsmomentets tidsderivata $\dot{L} = I\omega\Omega = m_b k^2\omega v/R$ när bussen går genom kurvan och därigenom vrider sig med vinkelhastigheten $\Omega = v/R$. Exakt kompensation, dvs inget normalkraftsmoment, inträffar när $M = h_G m_b v^2/R = m_b k^2\omega v/R$. Det

vill säga $\omega = \frac{m_b}{m_s}\frac{h_G v}{k^2}$ (Det är lämpligt och enkelt att dimensionskontrollera detta samband. Man kan också tänka efter och inse att ω ändras i rimlig riktning om en av parametrarna i taget fördubblas.) Exakt kompensation fordrar alltså att svänghjulets fart är propotionell mot bussens. Detta går tyvärr stick i stäv med iden, som nämns i uppiftstexten, att lagra energi i svänghjul vid inbromsning. Än värre ser det ut om man jämför storleken av hjulets rörelseenergi och bussens translationsrörelseenergi $\frac{E_h}{E_b} = \frac{I\omega^2}{m_b v^2} = \frac{m_b}{m_h}\frac{h_G^2}{k^2}$. Man kan inse att denna kvot nödvändigtvis är större än 1 (bussmassan inkluderar hjulmassan). Att minska bussarnas energiförbrukning är nog viktigare än att förbättra deras kurvtagningsförmåga. Kanske kan man klara bäggedera genom att använda tex tre svänghjul, två för bromsenergin och ett för rörelsemängdsmomentet. Men detta handlade uppgiften inte om. Storleksordningsförslag: Bussmassa 10^4 kg hjulmassa 10^3 kg, $h_G = k = 1$m, vinkelhastighet $\omega_n = 50\,\mathrm{s}^{-1}$, motsvarande $v = 5\,\mathrm{m/s}$. Starka metaller tål lätt spänningarna pga centrifugalkrafterna i sådana här hjul, men riskerna om energin frigörs vid trafikolycka bör beaktas.

4. Rymdstationen roterar till att börja med kring sin symmetriaxel med spinn s så att $g = Rs^2$, där $R =$ radien. Jag antar att impulsöverföringen vid rymdfarkostutskjutningen sker snabbt i jämförelse med s, så att den kan betraktas som stöt. Jag inför ett kroppsfixt koordinatsystem xyz så att origo ligger i torusens centrum, z-axeln pekar i spinnriktningen, och stöten träffar i $(R, 0, 0)$. Stötimpulsen kallar jag $-\Pi\hat{z}$. (Jag byter alltså uppgiftstextens symbol I mot Π för att hindra förväxling med tröghetsmoment.) Rymdstationens tröghetsmoment med avseende på z-axeln är $I = mR^2$, och med avseende på däremot vinkelräta riktningar genom origo $I_\perp = I/2$.
   Alldeles efter stöten är stationens rörelsemängdsmoment med avseende på sitt masscentrum $\vec{L} = Is\hat{z} + R\Pi\hat{y} = Is\hat{z} + \frac{1}{2}I\omega_y\hat{y} = L\hat{Z}$. Efter stöten är $\vec{L}$ är konserverad, så att $\hat{Z}$ är en fix riktning i rummet, kring vilken rymdskeppets rotationsvektor $\vec{\omega}$ och symmetriaxel $\hat{z}$ precesserar. För att få precessionshastigheten uttrycker man $\vec{\omega}$ i basvektorerna $\hat{z}$ och $\hat{Z}$:

$$\vec{\omega} = s\hat{z} + \omega_y\hat{y} = s\hat{z} + \frac{R\Pi}{I/2}\frac{L\hat{Z} - Is\hat{z}}{R\Pi} = -s\hat{z} + 2\frac{L}{I}\hat{Z} = -s\hat{z} + \Omega\hat{Z}.$$

   Numeriskt gäller $s = \sqrt{g/R} = 0.22\,\mathrm{s}^{-1}$, $L_y/L_z = R\Pi/(Is) = \Pi/(mRs) = 3.4 \cdot 10^{-4} \equiv \alpha$, säg. (Dimensionskontroll: $[\Pi/(mRs) = FT/(ML/T) = (ML/T^2)T/(ML/T) = 1.)$ $\alpha =$ tangens för vinkeln mellan symmetriaxeln $\hat{z}$ och precessionsaxeln $\hat{Z}$. Men eftersom α är så litet är det en god approximation att försumma termer av ordning α^2. Då är α vinkeln mellan $\hat{z}$ och $\hat{Z}$, och totala impulsmomentet kring masscentrum till beloppet samma som före utskjutningen, $L = Is$. Precessionshastigheten är $\Omega = 2s = 0.44\,\mathrm{s}^{-1}$. Rymdskeppets rotationsrörelse kan alltså beskrivas så att symmetriaxeln och den momentana rotationsaxeln ligger på motsatta sidor om den rumsfixa riktningen $\hat{Z}$, bildar bägge samma vinkel α med den, och precesserar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = 2s\hat{Z}$ kring den. Och spinnvektorn har ändrat tecken jämfört med före utskjutningen. Figur 7/22 b i läroboken illustrerar rörelsen för en sådan här axelsymmetrisk kropp med $I_\perp < I$.

5. Jag inför koordinater (x, y) så att snörets ändar är i punkterna $(-c, d)$ och (c, d) med $a = 2d$ och $\ell = 2\sqrt{c^2 + d^2}$. Kulans jämviktsläge, på lodlinjen mitt emellan snörets ändpunkter, är då i origo. Kulan kan röra sig utefter en bana i (x, y)-planet som bestäms av att snöret är sträckt och har längden ℓ: $\ell = \sqrt{(d-y)^2 + (c-x)^2} + \sqrt{(d-y)^2 + (c+x)^2}$. Banan är horisontell i origo, men kröker sig uppåt. För att bestämma periodtiden för små svängningar behövs en kvadratisk approximation av banan nära jämviktspunkten, dvs ett samband av formen $y = bx^2$. Konstanten b kan bestämmas genom att utveckla den exakta ekvationen för banan, dvs uttrycket för ℓ ovan, i potensserie i x och y, och försumma termer högre än lineära i y och kvadratiska i x. Gör man detta finner man $b = (\sqrt{1 - a^2/\ell^2})/\ell$.
   Så användes energimetoden. Summan av kinetisk och potentiell energi, $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgbx^2$ är konstant i tiden. (Hastigheten i y-led ger försumbar korrektion.) Derivering med avseende på tiden och division med $m\dot{x}$ ger rörelseekvationen $0 = \ddot{x} + 2gbx$, från vilken man avläser svängnngsrörelsens periodtid $T = 2\pi/\omega_n = 2\pi/\sqrt{2gb} = 2\pi/\sqrt{\frac{2g}{\ell}\sqrt{1 - (\frac{a}{\ell})^2}}$.
   Som rimlighetskontroll kan man observera att uttrycket för vinkelfrekvensen interpolerar mellan de bekanta uttrycken $\sqrt{\frac{g}{\ell/2}}$ för en pendel med längd $\ell/2$ när $a = 0$, och 0 för horisontell rörelse när $a = \ell$.