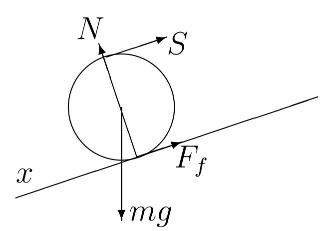
Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 17/1-2007, version 2

1. Om m betecknar partikelns massa, Ω jordens rotationshastighet (ungefär ett varv per dygn), och vi använder ett cartesiskt högersystem med x-axel österut och y-axel norrut utefter jordytan, så kan de sökta corioliskrafterna skrivas:
i) $-mv_0\Omega(\hat{z}/\sqrt{2}+\hat{x}\sqrt{3})$, $-mv_0\Omega\hat{z}/\sqrt{2}$, $-mv_0\Omega(\hat{z}/\sqrt{2}-\hat{x}\sqrt{3})$.
ii) $-mv_0\Omega\hat{x}(1+\sqrt{3})/\sqrt{2}$, $-mv_0\Omega\hat{x}/\sqrt{2}$, $-mv_0\Omega\hat{x}(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}$.

2. Kvantiteterna är respektive
i) Noll, 0.63 J, 1.01 kg m^2/s i rotationsaxelns riktning.
ii) 1 kg m/s åt väster, 4.2 J, 2.51 kg m^2/s i rotationsaxelns riktning.

3. Gravitationskraften tenderar att sträcka snöret. Fjädern ger då en motriktad kraft så att svängningsrörelse kan förekomma. Jag antar att svängningsrörelsens amplitud inte är för stor, så att snöret hela tiden är sträckt och cylindern rullar utan att glida. Jag använder mig av x =koordinat för cylinderns masscentrum, och $I = ma^2/2$ =cylinderns tröghetsmoment med avseende på sin symmetriaxel. Cylinderns vinkelacceleration när den rullar utför planet är $\ddot{x}/a$. Observera också att tråden sträcks ut dubbelt så långt som cylinderns masscentrum rör sig utför planet (momentana rörelsen är rotation kring kontaktpunkten med planet), så spänningen i snöret är $S = k2(x-x_0) + b2\dot{x}$. Rörelseekvationerna för masscentrums translation utför planet, och för rotation kring masscentrum, är, respektive

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - F_f - S \\ I\ddot{x}/a &= a(F_f - S) \end{aligned}$$



Eliminering av F_f och insättning av uttrycken för I och S ger

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + 4b\dot{x} + 4kx = mg\sin\alpha + 4kx_0.$$

Från denna rörelseekvation kan man avläsa de efterfrågade uttrycken: vinkelfrekvensen för odämpad svängning $\omega = \sqrt{8k/3m}$ och villkoret för kritisk dämpning $2b^2 = 3km$.

4. Att kulan ligger i jämvikt betyder att den befinner sig i vila relativt ståltråden. Därför beskriver jag kulans rörelse i ett trådfixt roterande system. Rotationen ger tröghetskrafter, centrifugalkraft och corioliskraft. Corioliskraften är vinkelrät mot kulans hastighet, dvs vinkelrät mot tråden. Den påverkar därför inte kulans rörelse (den orsakar bara en normalkraft som kompenserar den). Centrifugalkraften kan beskrivas av en centrifugalpotential. I cylinderkoordinater med vertikal axel,

$$\vec{F}_c = m\omega^2\rho\hat{\rho} = -\vec{\nabla}V_c, \qquad V_c = -m\omega^2\rho^2/2.$$

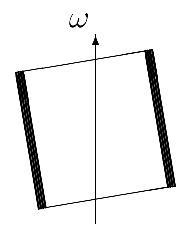
De ytterligare krafter som verkar på kulan är normalkraften (= tvångskraften) från tråden, som inte påverkar rörelsen, samt gravitationskraften, som kan beskrivas med gravitationspotential. Sammanfattningsvis kan alltså de krafer som påverkar rörelsen beskrivas av en effektiv potential, $V_{\text{eff}} = V_g + V_c$. Eftersom rörelsen är utefter en cirkel är det lämpligt att beskriva den med en sfärisk koordinat θ. Kalla cirkelradien a.

$$V_{\text{eff}} = V_g + V_c = mgz - m\rho^2/2 = ma(g\cos\theta - (a\omega^2/2)\sin^2\theta).$$

Med det sista potentialuttrycket är det nu lätt att besvara frågorna i uppgiften. Jämviktslägen finns där gradienten av potentialen är noll. Minima är stabila, maxima instabila. Det blir tre fall:
i) $g + a\omega^2 \cos\theta = 0$. Detta är bara möjligt om vinkelhastigheten är stor nog, $\omega^2 > g/a$, och ger då stabil jämvikt.
ii) $\theta = \pi$, dvs längst ned, är stabil jämvikt när i) inte är möjlig, annars instabil jämvikt.
iii) $\theta = 0$, dvs högst upp, är alltid instabil jämvikt.

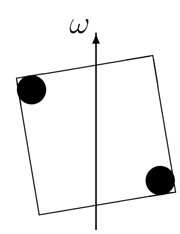
5. Antag att tvättmaskinstrumman har cylindersymmetri. Då är dess huvudtröghetsmoment m a p masscentrum på formen I_0, I_0, I. Det sista tröghetsmomentet är m a p symmetriaxeln. Om tröghetsmomenten är olika så fordras kraftmoment för att den skall kunna rotera med konstant vinkelhastighet kring en annan axel, så som den i uppgiftstexten kommer att göra. Relevant ekvation är 7/27 i läroboken, med $p = 0$ och $\dot{\psi} = \omega =$ trummans vinkelhastighet, och $\theta = 2°$: $\dot{L} = (I - I_0)\sin\theta\cos\theta\,\omega^2$.
Låt mig som konkret exempel välja trummans radie $a = 0.2$ m, trummans axellängd $2a$, massan $m = 5$ kg = massan hos våt tvätt, jämt fördelad på cylinderns mantelyta. Tröghetsmomenten är då $I = ma^2$, $I_0 = ma^2/2 + m(2a)^2/12 = (5/6)ma^2$. Jag antar också att trumman är upphängd i symmetriaxel (nästan) på trummans bägge sidor, dvs i två punkter på avståndet $2a$. Ekvation 7/27 ger då de krafter F i upphängningspunkterna som fordras för att upprätthålla konstant vinkelhastighet

$$4aF = \dot{L} = (I - I_0)\theta\omega^2 \qquad F = (1/12)maw^2\theta \approx 32\,\mathrm{N}$$



Uppskattningen är osäker, för F beror känsligt av I_0/I. En ännu större osäkerhetsorsak är att tvätten kan fördela sig ojämt. Övre gräns på kraftmomentet vid samma tvättning får man om tvätten lagt sig i två lika stora klumpar i motsatta hörn av trumman. Då är det enkelt att beräkna kraftens storlek (jag försummar θ här)

$$F = (m/2)a\omega^2 \approx 5800\,\mathrm{N}$$



Så tvättmaskiner måste konstrueras för att klara betydligt större felbelastnng än det som felmonteringen orsakar. (Kanske automatisk stoppfunktion?)

6. Från grafen avläser jag att ISS's höjd är ungefär 34 mil, och att den minskar med ungefär 10 mil per 100 dygn när den lämnas för sig själv. De snabba höjdökningarna antar jag orsakas av mänsklig påverkan (avsiktliga rörelsemängdstillskott).
a) Antag cirkelbana. Beteckningar: M = jordens massa, R = jordens radie, m = ISS's massa, h = dess höjd, v = dess höjd, ω = banans vinkelfrekvens. Omloppstiden beräknas från rörelseekvationen, $F = ma$:

$$\frac{mMG}{(R+h)^2} = m(R+h)\omega^2, \qquad \omega^2 = \tfrac{MG}{R^2}(\tfrac{R}{R+h})^2\tfrac{1}{R+h} = \tfrac{9.81}{(1+34/637)^2}\tfrac{1}{(637+34)10^4}\,\mathrm{s}^{-2},$$

$$T = 2\pi/\omega \approx 91.2\,\mathrm{min}.$$

b) Beräkningsprincip: bromskraftens effekt = energiminskningshastigheten. Banan antas fortfarande cirkulär. Relevanta ekvationer är sambandet mellan fart och höjd, sambandet mellan energi och höjd, och tidsderivatan av det senare sambandet:

$$v^2 = \frac{MG}{R+h}, \qquad E = -\frac{mMG}{2(R+h)}, \qquad \dot{E} = \dot{h}\frac{mMG}{2(R+h)^2}.$$

Energiminskningen orsakas av bromskraft F ($c =$ dess propotionalitetskonstant):

$$\dot{E} = vF = -cv^3 = -c(MG/(R+h))^{3/2}.$$

Jämförelse mellan dessa ekvationer ger

$$c = -\dot{h}(m/2)/\sqrt{gR^2(R+h)} \approx 4 \cdot 10^{-9}\,\text{kg/m}.$$

Anm: Intressant är att härur kan man uppskatta storleksordningen av atmosfärens densitet till c/A, ($A =$ ISS's tvärsnittsarea).
c) Beräkningsprincip: Energiminskningen, $mv^2/2 - m(v-u)^2/2$, kan relateras till ändringen av banans storaxel. Man har ju sambandet mellan storaxel och energi för keplerbanorna: storaxeln $= -mMG/E$. Det blir följande två ekvationer

$$\frac{v^2}{2} - \frac{(v-u)^2}{2} = -\frac{MG}{2R+2h} + \frac{MG}{2R+h}, \qquad v^2 = \frac{MG}{R+h}$$

Ur dem elimineras v och löses u. Jag använder också $MG = gR^2$ och får

$$u = \sqrt{\frac{gR}{1+h/R}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{2R+h}}\right) \approx 101\,\text{m/s}.$$