Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 29/5-2007.

1. Om rymdstationen är en rotationssymmetrisk tub, till formen liknande en cykelslang, och roterar kring sin symmetriaxel med vinkelhastighet ω, så kan dess innevånare uppleva centrifugalaccelerationen $R\omega^2$ som gravitationsacceleration, så att uppåt blir mot symmetriaxeln. Om R är stor nog kan det kanske vara lämligt att välja denna acceleration ungefär lika stor som jordens gravitationsacceleration, för att därigenom undvika försvagning av skelett och muskler. Om tex $R = 100$ m kan man välja $\omega = 0.3$ rad/s, så att accelerationen blir $9\,\mathrm{m/s^2}$. Coriolisaccelerationen när man rör sig med hastighet $\vec{v}$ i stationen är $2\vec{\omega} \times \vec{v}$. Går man tex längs ringen i normal lugn takt, 1 m/s, så blir coriolisaccelerationen i denna rymdstation $0.6\,\mathrm{m/s^2}$, uppåt eller neråt, inget stort problem (men kanske en lättare och en tyngre riktning för joggare?). Är R mindre och ω i motsvarande grad större så blir coriolisaccelerationen större. Men här finns marginal innan den blir riktigt besvärande. Rör man sig uppåt eller neråt blir accelerationen riktad i sidled, vilket nog kan vara farligare (en stege skulle kanske kunna välta?). Men å andra sidan brukar v då vara liten.

2. Krafterna på pinnen är gravitationskraften och normalkraften från underlaget. De är vertikala. Därför kommer pinnens masscentrum att röra sig enbart vertikalt. Samtidigt vrider sig pinnen. Åtminstone till en början är nedre änden i kontakt med underlaget. Då gäller sambandet $y = \ell \cos\theta$ mellan lutningsvinjkeln θ, vertikala koordinaten y, och masscentrums starthöjd ℓ. Eftersom pinnen är homogen har den längd 2ℓ och tröghetsmoment $I = m\ell^2/3$ med avseende på sitt masscentrum. (m är dess massa.) Normalkraften uträttar inget arbete, och gravitationskrafften är konservativ, så vi kan använda energikonserveringslagen till att få ett samband mellan position och hastighet,

$$E = mg\ell = mgy + (m\dot{y}^2 + I\dot{\theta}^2)/2.$$

Jag väljer att eliminera y och $\dot{y}$ med hjälp av sambandet ovan mellan y och θ och dess tidsderivata $\dot{y} = -\ell \sin\theta$, och finner

$$(1 - \cos\theta)2g/\ell = (1/3 + \sin^2\theta)\dot{\theta}^2.$$

För att avgöra om pinnen har kontakt med underlaget under hela fallet beräknar jag vinkelaccelerationen genom att derivera denna ekvation med avseender på tiden och dividera med $\dot{\theta}$, eliminerar $\dot{\theta}^2$ med hjälp av ekvationen ovan, och finner till slut:

$$(1/3 + \sin^2\theta)\ddot{\theta} = \sin\theta\, g/\ell - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = [1/3 + (1 - \cos\theta)^2](g/\ell)\sin\theta/(1/3 + \sin^2\theta).$$

Detta uttryck visar att vinkelaccelerationen är > 0. Då måste också normalkraften vara nollskild, och därför pinnen ha kontakt med underlaget, så att denna lösnings rörelse gäller ända tills pinnen slår i golvet för $\theta = \pi/2$.
(Anm: Har man en ickehomogen pinne, med $I \neq m\ell^2/3$, så kan man göra samma räkning som ovan, och enda skillnaden blir att $1/3$ ersätts med $I/(m\ell^2)$. Så även sådana pinnar behåller kontakten med underlaget ända tills de slår i det.)
Masscentrums fart när vår pinne slår i golvet, dvs $\theta = \pi/2$, blir

$$|\dot{y}_{\max}| = \ell \sin\theta\,\dot{\theta} = \ell sin\theta\sqrt{(1 - \cos\theta)(2g/\ell)/(1/3 + \sin^2\theta)} = \sqrt{3g\ell/2}.$$

3. Tröghetsmatrisen för en stel kropp relaterar ju komponenterna av dess rörelsemängd pga rotation, i ett cartesiskt koordinatsystem, till rotationsvektorns, $L_a = \sum_b I_{ab}\omega_b$, och kan beräknas genom att summera över alla masspunkter som den stela kroppen består av

$$I_{ab} = \sum_i m_i(r_i^2\delta_{ab} - r_{ia}r_{ib}).$$

(Här betyder δ_{ab} 1 när $a = b$, 0 annars. Och m_i är massan för masspunkt i, och $\vec{r}_i$ dess ortsvektor relativt punkt på rotationsaxeln.) Med hjälp av denna formel beräknar jag tröghetsmatrisen med avseende på origo (= masscentrum) för den stela kroppen i uppgiften, genom att summera över de 4 partiklar den består av, med resultatet

$$I_{ab} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} 2ma^2.$$

Allmänt gäller att när vinkelhastigheten pekar i en huvudtröghetsaxelriktning är rörelsemängdsmomentet riktat som vinkelhastigheten, och propotionell mot vinkelhastigheten, och huvudtröghetsmomentet I är propotionalitetskonstant. Detta faktum ger ett ekvationssystem som kan användas för att beräkna huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment. Dvs man har

$$\sum_b I_{ab}\omega_b = I\omega_a \quad \text{som fordrar} \quad \det(I_{ab} - \delta_{ab}I) = 0.$$

I vårt fall är $\hat{z}$ huvudtröghetsaxel, med huvudtröghetsmomentet $I_{zz} = 14ma^2$. De två andra huvudtröghetsaxlarna måste ligga i xy-planet, så för att bestämma dem räcker det att titta på övre vänstra 2 x 2 - undermatrisen av I_{ab}. Determinantekvationen har två lösningar, $I_1 = 2ma^2$ och $I_2 = 12ma^2$, som alltså är de två återstående huvudtröghetsmomenten. För var och en av dem kan ekvationssystemet användas till bestämning av ω's riktning. För $I = I_1$ finner man tex $\omega_y = 2\omega_x$, som ger huvudtröghetsaxelriktningen $\hat{\omega}_1 = (2\hat{x}+\hat{y})/\sqrt{5}$. På samma sätt finner man den andra huvudtröghetsaxelns riktning $\hat{\omega}_2 = (-\hat{x} + 2\hat{y})/\sqrt{5}$.
Några rimlighetskontroller. Huvudtröghetsaxlarna är ortogonala.
$I_3 = I_1 + I_2$ gäller alltid för plan tvådimensionell stel kropp för tröghetsmoment med avseende på punkt i kroppens plan.
Den aktuella kroppen kan uppfattas som sammansatt av två stavar som var och en ligger symmetriskt med avseende på origo. Om man tänker efter är det rimligt att det finns en huvudtröghetsaxelriktning mellan varje stavriktningspar.
Svar: Huvudtröghetsmomenten med avseende på masscentrum är $2ma^2$, $12ma^2$, $14ma^2$, och respektive huvudtröghetsaxelriktningar $(2\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{5}$, $(-\hat{x} + 2\hat{y})/\sqrt{5}$, $\hat{z}$.

4. Jag tänker mig ett cartesiskt koordinatsystem XYZ med origo i upphängningspunkten och Z-axeln riktad uppåt, samt ett symmetriaxelfixt koordinatsystem xyz med z-axeln = symmetriaxeln, och y-axeln riktad uppåt. Snurrans rotationsvektor, rörelsemängdsmoment med avseende på sitt masscentrum, $\vec{L}$, och kraftmoment med avseende på masscentrum, med rotationsrörelseekvationen $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$, är

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \nu\hat{z} + \Omega\hat{Z}, \\ \vec{L} &= I_0\nu\hat{z} + I_\perp\Omega\hat{Z}, \\ -\ell\hat{z} \times \vec{S} = \vec{N} = \dot{\vec{L}} &= \Omega\hat{Z} \times \vec{L} = \Omega\nu I_0\vec{Z} \times \vec{z}. \end{aligned}$$

För att termerna i sista ekvationen skalll peka åt samma håll fordras att $\vec{S}$ ligger i $\hat{Z}-\hat{z}-$planet. Ekvationen ger dessutom sambandet $\ell S\cos\theta = \Omega\nu I_0$. Härtill har vi ekvationerna för masscentrums rörelse. Kraftjämvikt i vertikalled ger $S\cos\theta = mg$, och i horisontell led ger rörelseekvationen $m(\ell + L\sin\theta)\Omega^2 = S\sin\theta$. De tre sista ekvationerna ger, genom elimination av S och Ω, det sökta sambandet, (som lämpligen dimensionskontrolleras)

$$(\ell + L\sin\theta)g(\frac{\ell m}{\nu I_0})^2 = \tan\theta.$$

Vilka lösningar θ har denna ekvation? Om man betänker att koefficienterna är positiva, och föreställer sig hur höger och vänsterleden uppför sig i intervallet $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, så tror jag man kan visa att det alltid finns en lösning i första kvadranten, och dessutom noll eller två i fjärde kvadranten. Om vinkeln θ är nära noll så kan vi approximera tangens och sinus med vinkeln. Då får vi

$$\theta \approx \ell/(\frac{1}{g}(\frac{\nu I_0}{\ell m})^2 - L).$$

Denna approximation gäller tex om snörets längd är tillräckligt stor, eller om spinnet är tillräckligt stort, men inte om bägge är stora och termerna i nämnaren är nästan lika stora.

5. Jord- och mars-baneradierna är alltså perihelion- och aphelion-radier för den planerade farkostens bana. Energi- och rörelsemängds-konserveringslagarna ger oss två ekvationer som bestämmer farterna i perihelion och aphelion ($\gamma = M_s G$):

$$\begin{array}{cc} (E/m =) & -\frac{\gamma}{r_1} + \frac{1}{2}v_1^2 = -\frac{\gamma}{r_2} + \frac{1}{2}v_2^2, \\ (L/m =) & r_1 v_1 = r_2 v_2, \\ \Rightarrow & v_1^2 = \frac{\gamma}{r_1}\frac{2r_2}{r_1+r_2}. \end{array}$$

v_1 är alltså den fart som behövs för att nå mars. Farkostens fart före accelerationen, dvs jordens fart, kan beräknas på samma sätt, fast med $r_2 \to r_1$. Så $v_j^2 = \gamma/r_1$, och sökta farttillskottet

$$\Delta v = v_1 - v_j = \sqrt{\frac{\gamma}{r_1}}(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1) = 2.90\,\text{km/s}$$

För att beräkna flykthastigheten från jorden kan man använda sig av att den skall vara så stor att kinetiska energin precis uppväger potentiella energin pga jordens gravitation vid jordytan (sammanlagda energin = 0). Det ger $v_f^2/2 = m_j G/r_j = g r_j$, som ger $v_j = 11.2$ km/s. Så jordens gravitation påverkar planerna radikalt. Man får förslagsvis först se till att komma ovanför jordens bromsande atmosfär, och sedan göra v så stor att jordens gravitation övervinns, och den hastighet som därefter återstår är v_1.