Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 18/1-2008.

1. Om de fyra svarsalternativen på varje fråga kallas A B C D respektive så är de rätta svaren (ursäkta, det blev fel i tesen så att inget alternativ är rätt på a)):
a) 2.03 N västerut, b) C, c) B, d) D, e) D f) D, g) D, h) B.

2. Det är frågan om en stel kropps rörelse i vertikalt plan. Använder rörelsemängdsmomentlagen, $\dot{L} = M$, med avseende på upphängningspunkten. Kraftmomentet orsakas av gravitations- och luftfriktions-krafter, så ekvationen kan skrivas

$$I\ddot{\theta} = M_g + M_f$$

där θ är utslagsvinkeln. Tröghetsmomentet är $I = m\ell^2/3$. Gravitationskraftens moment är, i approximation giltig för små vinklar, $M_g = -mg(\ell/2)\sin\theta \approx -mg(\ell/2)\theta$. Friktionskraftens moment beräknas genom att tänka sig staven uppdelad i små bitar och summera momenten på alla småbitarna med en integral

$$M_f = -\int_0^\ell dx\, c\,(x\dot{\theta})\,x = -\frac{1}{3}c\ell^3\dot{\theta}$$

(Faktorn i parentesen är småbitens hastighet.) Rörelseekvationen kan nu skrivas

$$\ddot{\theta} + (c\ell/m)\dot{\theta} + (3g/2\ell)\theta = 0$$

Detta är ekvationen för dämpad harmonisk svängning, kritiskt dämpad när

$$(c\ell/m)^2 = 4(3g/2\ell), \quad \text{dvs} \qquad c = m\sqrt{6g/\ell^3}.$$

Dimensionskontroll: Definitionen av c: kraft $= c\cdot$längd$\cdot$hastighet, ger

$$[c] = \frac{[\text{kraft}]}{[\text{längd}][\text{hastighet}]} = \frac{ML}{T^2}\Big/\frac{LL}{T} = \frac{M}{LT}.$$

Detta stämmer med dimensionen enligt vårt uttryck för c:

$$[c] = [m\sqrt{6g/\ell^3}] = M\sqrt{\frac{L}{T^2L^3}} = \frac{M}{LT}.$$

3. Jag löser först uppgiften i fallet friktionskoefficient och friktionskraft noll. Därefter inser man att samma stöt är den önskade även ifall friktionskraften är nollskild. Stöten tillför under kort tid en horisontellt riktad rörelsemängd p till bollen (om man vill kan man tänka sig den som $p = F\,dt$), som ger dess masscentrum en hastighet v åt vänster. Samtidigt tillför den bollen ett rörelsemängdsmoment med avseende på masscentrum $p(h-a)$, som ger den en rotationshastighet w moturs. De enda återstående krafter som verkar på bollen är gravitationskraften och normalkraften från bordet, som precis balanserar varandra. Rörelsemängdslagen, rörelsemängdsmomentlagen, samt villkoret att bollen inte glider mot bordet ger ekvationerna

$$p = mv \qquad (h-a)p = I\omega = (2ma^2/5)w \qquad v = aw$$

Dessa ekvationer ger ett samband mellan h och a (man får det tex genom att dividera andra ekvationens bägge led med första ekvationens motsvarande, samt eliminera w med hjälp av den tredje). Detta samband kan skrivas $h = 7a/5$ som är det sökta svaret.

4. De fyra första kvantiteterna handlar alla om banans storlek och form. Den är ju en ellips som beskrivs av två parametrar, så här finns två konsistensrelationer att kolla. Tex kan banan beskrivas i polära koordinater som $r = c/(1 - e\cos\theta)$. Då är perihelion $r_1 = c/(1+e)$, aphelion $r_2 = c/(1-e)$, halvstoraxeln $a = (r_1 + r_2)/2 = c/(1-e^2)$, halvlillaxel $b = c/\sqrt{1-e^2}$ och $(r_2 - r_1)/2 = ec/(1-e^2)$. Jag väljer följande två samband

$$a = (r_1 + r_2)/20 = (249\,228\,730 + 206\,644\,545)/2\,\text{km} = 227\,936\,637.5\,\text{km}$$
$$e = (r_2 - r_1)/(r_2 + r_1) = 0.093\,412\,330$$

De stämmer så bra som är möjligt. De återstående två givna kvantiteterna beror också på planetens hastighet. De är relaterade till varandra genom att omloppstiden multiplicerad med medelhastigheten är banans längd, $Tv = \ell$, och banans längd är förstås bestämd av de föregående parametrarna. En svårighet är att det inte finns något enkelt uttryck för ellipsens omkrets i tex a och b analogt med cirkelns omkrets uttryckt i radien. Jag utnyttjar i stället att banan är nästan cirkulär till en approximationsmetod: Ellipsens ekvation kan skrivas $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Jämförelse av denna ekvation med "trigonometriska ettan" ger en parameterframställning av de cartesiska koordinaterna, $x = a\sin\psi, \quad y = b\cos\psi$. Differentiering ger

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = ((a\cos\psi)^2 + (b\sin\psi)^2)\,d\psi^2 = a^2(1 - e^2\sin^2\psi)\,d\psi^2,$$
$$d\ell = d\psi\, a\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi} = d\psi\, a(1 - (1/2)e^2\sin^2\psi - (1/8)e^4\sin^4\psi).$$

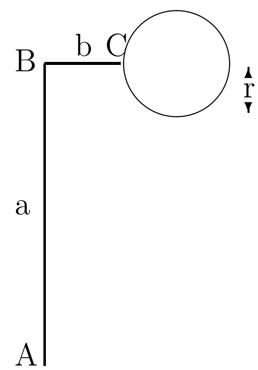
Här har termer av storleksordning e^6 försummats. De är helt försumbara i det aktuella fallet. Detta approximativa uttryck är inte svårt att integrera. Det ger

$$\ell = 2\pi a(1 - e^2/4 - 3e^4/64) = 2\pi(1 - 0.002\,181\,466 - 0.000\,003\,569) = 1\,429\,038\,792\,\text{km}.$$

Medelhastigheten beräknad från givna omloppstiden blir $v = \ell/T = 24.076\,803\,\text{km/s}$. Här är sista siffran insignifikant eftersom T gavs med 7 siffror. Slutsatsen är att de 2 sista givna kvantiteterna är konsistenta med varandra. Man kan också konstatera att e^4-termen inte behövts för denna koll eftersom v givits med bara 5 siffror. En alternativ approximationsmetod som ger rätt e^2-term men fel e^4-term, och som därför dugit i vårt fall, vore att approximera parabelns omkrets med omkretsen av en cirkel vars radie är medelvärdet av halvstoraxel och halvlillaxel.
Slutligen kan vi använda formeln för omloppstiden till att beräkna solens massa M. $(T/2\pi)^2 MG = a^3$ ger med givna sifferuppgifter, $M = 1.9897 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$. Här är de 2 sista siffrorna osäkra eftersom G givits med bara 3 siffror.

5. Inför ett kroppsfixt högerorienterat koordinatsystem sådant att AB ligger på negativa z-axeln och BC på positiva x-axeln. Den stela kroppens rörelse är alltså en ren rotationsrörelse med konstant rotationshastighet på formen $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ kring origo. Uppgiften kan förstås lösas på lite olika sätt. Man kan ställa upp rörelseekvationerna för translation och rotation för hela kroppen. Alternativt kan man dela upp kroppen i delar , och ställa upp rörelseekvationer för dem. Här väljs det senare alternativet. Det blir fler ekvationer eftersom det är flera delar, men de blir enklare eftersom delarna kan väljas mer symmetriska. Jag tänker mig nu den stela kroppen uppdelad i tre delar, vertikala staven AB, horisontella staven BC, och klotet, och ser först på mekaniken för varje del för sig.

Klotets masscentrum rör sig med hastigheten $\vec{v}_k = (b+r)\Omega\hat{z}$, och har därför acceleration $\vec{\Omega} \times \vec{v}_k = -(b+r)\Omega^2\hat{x}$. Det måste därför påverkas av en nettokraft $-(b+r)\Omega^2 m_k\hat{x}$. Denna kraft måste vara en kontaktkraft i C från staven BC, och staven BC måste påverkas i C av dess motkraft $(b+r)\Omega^2 m_k\hat{x}$. Samtliga rörelseekvationer för klotet är uppfyllda med denna enda kraft, så några fler krafter behöver inte verka på det. På liknande sätt finner man att nettokraften på staven BC är $-(b/2)\Omega^2 m_{BC}\hat{x}$, och detta fordrar en kontaktkraft $-(b/2)\Omega^2 m_{BC}\hat{x} - (b+r)\Omega^2\mu_k\hat{x}$ i B. Med dessa krafter är samtliga rörelsemängds- och rörelsemängdsmoment-ekvationer för staven BC uppfyllda. I B verkar därför motkraften $\vec{F}_B = ((b/2)m_{BC} + (b+r)m_k)\Omega^2\hat{x}$ på AB.



Staven AB, slutligen, har konstant rörelsemängd och konstant rörelsemängdsmoment (de är noll eftersom staven är tunn, så att dess alla delar rör sig med försumbara hastigheter). För den råder därför kraftjämvikt och momentjämvikt. Eftersom enda krafterna på staven är kontaktkrafterna i B, som vi beräknat, och kontaktkrafterna i A, så bestämmer dessa jämviktsekvationer kontaktkrafterna i A. Momentjämvikt map A ger sökta kraftmomentet som verkar på stela kroppen i A,

$$M_A = -a\hat{z} \times \vec{F}_B = -a((b/2)m_{BC} + (b+r)m_k)\Omega^2\hat{y} =$$
$$-1[(0.25/2)(10 \cdot 0.25) + (0.25+0.25)5](10 \cdot 2\pi)^2\hat{y}\text{Nm} = -11.10\text{kNm}\hat{y}.$$

(Dessutom verkar en kraft lika stor som kraften på staven AB i B.)
Anm: Jag har försummat gravitationskraften i denna räkning. Gravitationskrafterna på kulan och på AB ger kraftmoment map A, $((b/2)m_{BC}+(b+r)m_k)g\hat{y} = 0.03$kNm. Tar man hänsyn till gravitationskraften så måste kraftmomentet i A ökas något till -11.13kNm$\hat{y}$.