Lösningar till tentamen i Mekanik för F del B

20 oktober 2003

1. Rätt rad är
   - Om man vill att en raket... S
   - Corioliskraften på en stadsbuss... F
   - Rörelsemängdsmomentet m.a.p. en godtycklig punkt... S
   - Ett svagt dämpat/underdämpat system... F
   - En stel kropps rörelse... F
   - Reguljär precessionsrörelse... S
   - En homogen sfär och en homogen kub... S
   - Om en kropp i ett visst ögonblick roterar... S
   - Centrifugalkraften är den kraft som åstadkommer centripetalaccelerationen... F
   - En luftmotståndskraft vid tredimensionell rörelse... F
   - Om en kraft verkar på en stel kropp... F
   - Kinetisk energi för en stel kropp... S

2. Kalla upphängningspunkten O och ställ upp momentekvationen kring denna. Både tyngdkraften och luftmotståndet ger upphov till vridande moment kring O:

$$-mg\frac{l}{2}\sin(\theta) - M_{\text{luft}} = I_O\ddot{\theta}, \tag{1}$$

där θ är vinkeln som pinnen bildar med vertikalen. För små θ så gäller att $\sin(\theta) \approx \theta$. Vi har även att $I_O = \frac{1}{3}ml^2$. Kraften per längdenhet på en viss del av pinnen, som ligger en sträcka s från O är $f = cs\dot{\theta}$. Det vridande momentet som luftmotståndet ger upphov till integreras fram enligt

$$M_{\text{luft}} = \int_0^l fsds = \int_0^l cs^2\dot{\theta}ds = \frac{1}{3}cl^3\dot{\theta}. \tag{2}$$

Momentekvationen kan nu skrivas som

$$\ddot{\theta} + \frac{cl}{m}\dot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0, \tag{3}$$

vilket ger följande karaktäristiska ekvation

$$r^2 + \frac{cl}{m}r + \frac{3g}{2l} = 0, \tag{4}$$

som har lösningarna

$$r = -\frac{cl}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2l^2}{4m^2} - \frac{3g}{2l}}. \tag{5}$$

Kritisk dämpning fås då vi har en dubbelrot, dvs då rotuttrycket försvinner, detta sker då

$$\frac{c^2l^2}{4m^2} - \frac{3g}{2l} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{\frac{6gm^2}{l^3}}, \tag{6}$$

där vi har förkastat den negativa lösningen av rimlighetsskäl. Vi noterar att c har dimensionen $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$.

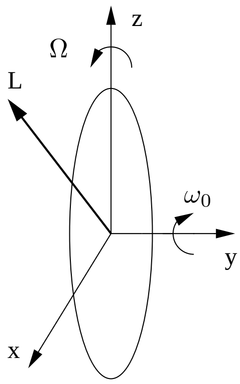
3. (a) Kalla massan av lastbil med last för $m(t)$ och dess fart för $v = 1$m/s. Massflödet är $m' = 200$kg/s och vi inser att $\dot{m}(t) = m'$. Kalla drivkraften från motorn för F och ställ upp Newtons andra lag i lastbilens körriktning:

$$F = m\dot{v} + \dot{m}u, \tag{7}$$

men $\dot{v} = 0$, $\dot{m} = m'$ och den relativa hastigheten mellan lastbil och lasten i luften är $u = v$. Vi får alltså att $F = m'v$. Motoreffekten är $P = Fv = m'v^2 = 200$W.

(b) När lasten sugs upp från lastbilen bibehåller den sin fart i lastbilens körriktning tills den träffar uppsugningsröret. Därför är den relativa hastigheten $u = 0$, så $F = 0$ och därför är även motoreffekten $P = 0$.

4. För att rörelsemängdsmomentet kring tyngdpunkten för ett av cykelhjulen $\mathbf{L}$ ska ändra riktning behövs det ett vridande moment i den riktningen. Om man lägger ett koordinatsystem enligt figuren (där cykeln färdas i negativ x-led) och svänger åt vänster så kommer $\mathbf{L}$ att vrida sig kring z-azeln så att $\Delta\mathbf{L}$ pekar utmed positiva x-axeln. För att få ett vridande moment i positiv x-led kring hjulets tyngdpunkt måste man luta sig mer inåt kurvan. (Samma resultat fås om man svänger åt höger.)



För att göra en uppskattning av storleksförhållandet mellan gyroeffekten och centrifugalkraften ställer vi upp momentekvationen kring ett av hjulens mittpunkt.

$$\mathbf{M}_{\text{gyro}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}, \tag{8}$$

där $\mathbf{\Omega} = \Omega\hat{z}$ beskriver hur ett koordinatsystem bundet till hjulets huvudtröghetsaxlar roterar (precession). Den totala vinkelhastighetsvektorn för hjulet är summan av spinn och precession, dvs $\omega = \omega_0 + \mathbf{\Omega} = -\omega_0\hat{y} + \Omega\hat{z}$. Detta ger att hjulets rörelsemängdsmoment kring upphängningspunkten är $\mathbf{L} = I_{yy}\omega_0 + I_{zz}\mathbf{\Omega}$. Vi antar att både spinn och precession är konstanta till storlek så att tidsderivatan av rörelsemängdsmomentet relativt det roterande koordinatsystemet är noll. Momentekvationen ger då

$$\mathbf{M}_{\text{gyro}} = \mathbf{\Omega} \times (I_{yy}\omega_0 + I_{zz}\mathbf{\Omega}) = I_{yy}\mathbf{\Omega} \times \omega_0 = I_{yy}\Omega\omega_0\hat{x}. \tag{9}$$

En skaplig uppskattning av tröghetsmomentet för ett cykelhjul är $I_{yy} = mr^2$, där m är hjulets massa och r dess radie. Eftersom en cykel vanligtvis har två likadana hjul blir den totala gyroeffekten $\mathbf{M}_{\text{gyro tot}} = 2mr^2\Omega\omega_0\hat{x}$.

För att uppskatta effekten från centrifugalkraften antar vi att cyklisten svänger med svängningsradien R. Vi noterar att cyklistens fart kan tecknas på två sätt, $v = r\omega_0 = R\Omega$. Centrifugalkraften blir då

$$F_{\text{centrifugal}} = MR\Omega^2 = Mr\omega_0\Omega. \tag{10}$$

Denna kraft angriper i den gemensamma tyngdpunkten för cykel och cyklist, vi antar att denna ligger en sträcka h över marken. Om cyklisten lutar sig inåt kurvan med vinkeln θ relativt vertikalen finner vi att centrifugalkraften ger upphov till ett vridmoment

$$\mathbf{M}_{\text{centrifugal}} = -Mr\omega_0\Omega h\cos(\theta)\hat{x} \tag{11}$$

kring en axel som går genom de båda hjulens kontaktpunkter med marken. Vi finner således att

$$\frac{M_{\text{gyro tot}}}{M_{\text{centrifugal}}} = \frac{2rm}{Mh\cos(\theta)} \approx \frac{m}{M} \approx \frac{2\text{kg}}{80\text{kg}} = \frac{1}{40}, \tag{12}$$

där vi har antagit att $2r = h\cos(\theta)$, vilket borde stämma ganska bra. Vi ser att svaret är oberoende av hur fort man cyklar samt hur tvär kurva man tar. Dessutom finner vi att gyroeffekten är relativt liten i jämförelse med den fiktiva centrifugalkraften.