Lösningar till tentamen i Mekanik F del B 12 januari 2003

1. FSF SSF SSS SSS

2. Trycket på cylinderns bottenyta är $p = \rho_0 g x$ $[Nm^{-2} = (kgm^{-3})(ms^{-2})m]$, där ρ_0 är vattnets densitet och x avståndet från bottenytan till vattenytan. Lyftkraften är allstå $F_{\text{lyft}} = -\rho_0 g x A$, där A är cylinderns tvärsnittsarea, och minustecknet kommer av att jag väljer samma referensriktning för kraften som för läget x. Tyngdkraften är $F_g = mg = \rho A h g$, där ρ är kroppens densitet och h cylinderns längd. Cylinderns rörelseekvation blir alltså

$$\rho A h \ddot{x} = -\rho_0 A g x + \rho A g h = -\rho_0 A g \left(x - \frac{\rho}{\rho_0} h \right)$$

Jämviktsläget är $x = x_0 = \frac{\rho}{\rho_0} h$ (verkar rimligt—en mycket lätt cylinder sjunker knappt ned alls, medan en som nästan har vattnets densitet är nästan helt nedsänkt). Definiera koordinaten y som är noll i jvktsläget: $y = x - x_0$. Rörelseekvationen blir

$$\ddot{y} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{g}{h} y = 0$$

varur vinkelfrekvensen avläses: $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{g}{h}}$. Dimensionerna är uppenbara.

Om det dessutom finns en dämpkraft blir ekvationen

$$\ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

där $\gamma = \frac{b}{2\rho A h}$. Den karakteristiska ekvationen, $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$, har lösningar $r = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, och man får svagt dämpade svängningar som avtar exponentiellt på en tidsskala γ^{-1}. Påståendet "b är liten" betyder att $\gamma << \omega_0$.

Dimensionskontroll: $[\gamma^{-1}] = [\rho A h b^{-1}] = kgm^{-3} m^3 (Nsm^{-1})^{-1} = s$.

3. Plogens hastighet: $v = 10m/s$, snöns densitet $\rho = 150kg/m^3$, plogens tvärsnittsarea: $A = 2.5 \times .5 = 1.25m^2$.

Massa snö per tidsenhet som accelereras från vila till hastigheten v: $\dot{m} = \rho A v$. Impulsökning per tidsenhet = kraft: $F = \dot{m} v = \rho A v^2$ (vad som händer med snön efter den har lämnat skoveln spelar ingen roll). Effekten är $P = Fv = \rho A v^3$.

Numeriskt: $P = 150 \times 1.25 \times 1000 \approx .2MW$.

Dimensionskontroll (enheter): $[\rho A v^3] = kgm^{-3} \times m^2 \times (ms^{-1})^3 = kgm^2 s^{-1} = W$.

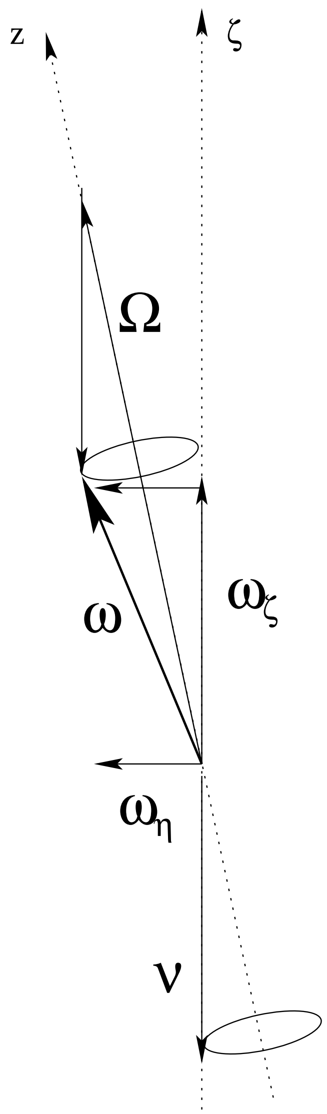
Om motorn slutar driva vid $x = 0$, $v = v_0$, är $ma = mv\frac{dv}{dx} = -\rho A v^2$, med lösningen $v = v_0 e^{-\frac{\rho A}{m}x}$. Hastigheten sjunker till hälften efter sträckan $x = \frac{m}{\rho A}\log 2 \approx 15m$ (rimlighet: efter denna sträcka är massan hos den bortröjda snön jämförbar med bilens massa). En bil som börjar rulla med $10m/s$ tar normalt mycket längre sträcka för att tappa en stor del av sin fart, så det är nog inte helt orimligt att kasta andra motståndskrafter...

4. Beteckna koordinatriktningar anpassade till rymdstationen med ξ, η, ζ, där ζ-axeln ligger längs symmetriaxeln. Rymdstationen har tröghetsmoment $I_\zeta = mR^2$ med avseende på sin symmetriaxel och $I_\perp = \frac{1}{2}mR^2$ med avseende på axlar vinkelräta mot symmetriaxeln. Före stöten har den ett rörelsemängdsmoment $\mathbb{L}_0 = I_\zeta \omega_0$, där ω_0 är rotationshastigheten. Denna bestäms av den effektiva tyngaccelerationen $\tilde{g} = .75g = R\omega_0^2$. Numeriskt är $\omega_0 \approx .27s^{-1}$, $L_0 \approx 5.4 \times 10^{10} kgm^2s^{-1}$.

Impulsen $\mathbb{I}$ verkar enligt figuren i uppgiften. I vårt koordinatsystem är $\mathbb{I} = -I\hat{\zeta}$. Låt ξ-axeln gå genom angreppspunkten. Då fås ändringen i rörelsemängdsmoment $\Delta\mathbb{L} = R\hat{\xi} \times \mathbb{I} = RI\hat{\eta}$. Numeriskt är denna ändring till beloppet mycket mindre än L_0, $\frac{|\Delta\mathbb{L}|}{L_0} \approx 1.8 \times 10^{-5}$. Kalla detta lilla tal för α.

Rörelsemängdsmomentet efter stöten är $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 + \Delta\mathbb{L} = L_0(\hat{\zeta} + \alpha\hat{\eta})$. Eftersom det inte finns några vridande moment kommer $\mathbb{L}$ att förbli konstant. Den definierar en rumsfix riktning $\hat{z}$ som rotationsvektorn kommer att precessera kring. Rotationsvektorn $\vec{\omega}$ omedelbart efter stöten fås från $\mathbb{L} = I_\zeta\omega_\zeta + I_\perp\omega_\eta$, så $\vec{\omega} = \omega_0(\hat{\zeta} + 2\alpha\hat{\eta})$. Om man istället sönderlägger $\vec{\omega}$ i en del längs $\hat{\zeta}$ (spinn) och en längs $\hat{z} = (1 + \alpha^2)^{-1/2}(\hat{\zeta} + \alpha\hat{z})$ (precession), så får man $\vec{\omega} = \nu\hat{\zeta} + \Omega\hat{z}$, där $\nu = -\omega_0$ och $\Omega = 2\sqrt{1 + \alpha^2}\omega_0 \approx 2\omega_0$.

På nästa sida finns en bild som visar ungefär hur det ser ut, om man förstorar upp vinkeln mellan $\hat{z}$ och $\hat{\zeta}$, som ju är ungefär α mätt i radianer. Spinnvektorn är nästan precis motriktad precessionsvektorn och hälften så lång som den. Spinnvektorn, liksom alltså totala rotationsvektorn, precesserar runt Ω som visat i figuren. Rymdstationens plan är hela tiden vinkelrätt mot spinnvektorn. Effekten är en mycket liten variation hos $\vec{\omega}$, och alltså en mycket liten "wobblande" rörelse hos rymdstationen.



/Martin Cederwall 11 januari 2004