Lösning till Tentamen mekFB 050110

1. a. Om massorna är lika ($m_1 \to m_2$) medför det att $\mu \to \infty$ samt att accelerationen $\ddot{s} \to 0$ vilket är orimligt. Genom att ställa upp netwons andra lag för systemet erhålls samma differentialekavation $\ddot{s} = -\frac{F(s)}{\mu}$ men med $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ vilket är den reducerade massan.

   b. Rymdstationen består av tre torusar (cykelslangar eller munkar) som alla är vinkelräta mot varandra. Ett sätt att visualisera stationen är att sätta ihop tre ortogonala stänger (ξ, η, ζ) och därefter hänga på de tre torusarna på var sin stång. På så sätt blir även de vinkelräta mot varandra. När rymdfarkosten lämnar stationen får stationen en impulssörelse $\vec{p}$ m.a.p på masscentrum samt en rotationsrörelse $\vec{\omega}$ runt masscentrum, där $\vec{\omega}$ och $\vec{p}$ är vinkelräta mot varandra. Då kroppen är sfärisk symmetrisk kommer dessutom rörelsemängdsmomentet $\vec{L}$ och rotationen $\vec{w}$ att peka i samma rikting. Stationen kommer därför inte att precessera. Däremot, om kroppen *inte* varit sfärisk symmetrisk hade den mycket väl kunnat precessera då $\vec{L}$ och $\vec{w}$ inte nödvändigtvis är parallella.

   c. Enhetsanalys: $\ell_p \sim [m]$ och $\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim [s]$. För att dimensionen skall stämma krävs ett extra [m/s] dvs c. Rätt svar är alltså

$$\ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim [m]. \tag{1}$$

2. Rörelseekvation för systemet:

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

   Karakteristisk ekvation:

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \tag{3}$$

   Kristisk dämpning:

$$\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = -\frac{\gamma}{2} \tag{4}$$

   Lösning:

$$x(t) = e^{-t/\tau}\,(A + Bt) \tag{5}$$

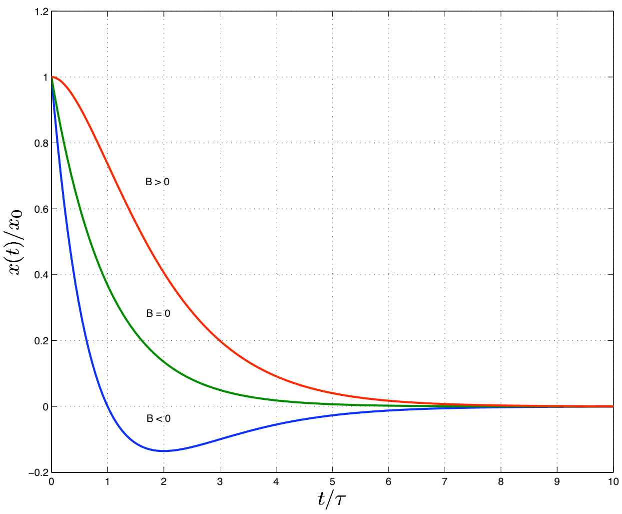
   där $\tau = 2/\gamma$. Låt origo vara partikelns jämviktsläge. Vid tiden $t = 0$ är den förflyttad en sträcka $x_0 > 0$ från den punkten samt att den har en hastighet $v_0 > 0$ (riktad mot jämviktsälget).

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = -v_0 \tag{6}$$

   Detta ger att

$$A = x_0 \quad B = \frac{x_0}{\tau} - v_0 \tag{7}$$

   För att partikeln skall passera jämviktsläget $x(t) < 0$ krävs att $B < 0$ dvs $v_0 > \frac{x_0}{\tau}$ [1] (se figur). Figuren visar också att jämviktsläget bra kan passeras en gång under rätt förutsättningar.



3. En partikel rör sig (friktionsfritt) på ett sfäriskt skal med hastigheten $\vec{v}$. Corioliskraften ger upphov till en kraft som alltid är vinkelrät mot $\vec{v}$ vilket resulterar i en centralrörelse [2] (jämför hur ett magnetfält **B** böjer trajektorian av en elektrisk laddning q).

   Hur stor är kraften som verkar på partikeln i ytans plan? Låt partikeln ha massan m och låt jordens rotationshastighet (kring sin egen axel) vara Ω_E. Corioliskraften är då

$$\vec{F}_{\text{corr}} = -2m\vec{\Omega}_E \times \vec{v}. \tag{8}$$

   Ω_E kan delas upp i två komponenter: en komponent som ligger i planet $\vec{\Omega}_H$ samt en som är vinkelrät mot planet $\vec{\Omega}_V$. Då $\vec{v}$ också ligger i planet pekar vektorn $\vec{\Omega}_H \times \vec{v}$ vinkelrät mot ytan dvs påverkar inte dess rörelse på sfären. Däremot så ligger $\vec{\Omega}_V \times \vec{v}$ i planet och är alltid vinkelrät mot $\vec{v}$ (därav centralrörelsen). $\vec{\Omega}_V$ kan skrivas om i termer av breddgraden θ som $\vec{\Omega}_V = \Omega_E \sin\theta\, \hat{r}$ där $\Omega_E = |\vec{\Omega}_E|$. Kraften som ger upphov till partikelns cirkelrörelse är alltså

$$\vec{F}_{\text{c}} = -2m\Omega_E \sin\theta\, \hat{r} \times \vec{v}. \tag{9}$$

   Radien för en sådan rörelse kan uppskattas med Newtons andra lag $F_c = ma_c$ där $F_c = |\vec{F}_{\text{c}}|$ och $a_c = \frac{v^2}{r}$. Detta ger uttrycket

$$r = \frac{v}{2\Omega_E \sin\theta} \quad [m]. \tag{10}$$

   Från denna ekvation kan en enkel storleksuppskattning göras av ett roterande vädersystem. Om

$$v \sim 30 \text{ m/s} \qquad \Omega_E \sim 10^{-5} \text{ 1/s} \qquad \theta \sim \frac{\pi}{4} \tag{11}$$

   blir vädersystemets radie

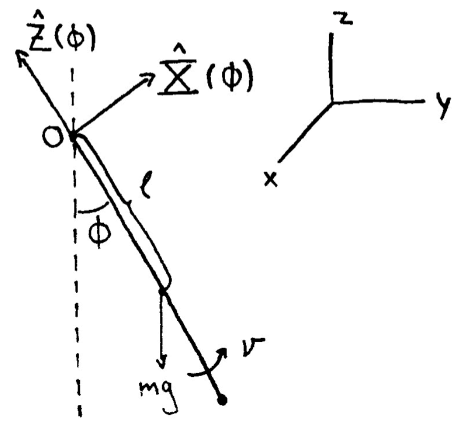
$$r \sim 200 \text{ mil}. \tag{12}$$

---

[1] Observera att denna analys gäller för $x(0) = x_0$. Om man väljer $x(0) = -x_0$ måste $\dot{x}(0) = v_0$.
[2] Se D.Kleppner och R.J Kolenkow *An Introduction to Mechanics* sid. 364-367.

4

Vridmomentet från infästningen hindrar rörelse i $\hat{x}$-led, vidare följer det vridande momentet pendelrörelsen. Således är detta vridmoment vinkelrätt mot $\hat{x}$ och $\hat{Z}(\phi)$.



$$\mathbb{M}_o = \ell mg \sin\phi(-\hat{x}) + M_{inf}(\phi)\hat{Z}(\phi)$$

$$\omega = v + \Omega = v\hat{Z}(\phi) + \dot{\phi}(-\hat{x})$$

$$\mathbb{H}_o = I_{xx}\dot{\phi}\hat{x} + I_{\parallel} v \hat{Z}(\phi) =$$

$$= I_{xx}\dot{\phi}\hat{x} - I_{\parallel} v \sin\phi\,\hat{y} + I_{\parallel} v \cos\phi\,\hat{z}$$

$$\begin{cases} \hat{Z}(\phi) = -\sin\phi\,\hat{y} + \cos\phi\,\hat{z} \\ \hat{X}(\phi) = \cos\phi\,\hat{y} + \sin\phi\,\hat{z} \end{cases}$$

Sätts in i ekv.

$$\sum \mathbb{M}_o = (\dot{\mathbb{H}})_{xyz} + \Omega \times \mathbb{H}_o$$

$$\Omega \times \mathbb{H}_o = I_{\parallel} v \sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x}\times\hat{y} - I_{\parallel} v \cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x}\times\hat{z} =$$

$$= I_{\parallel} v \dot{\phi}\,\hat{X}(\phi)$$

$$(\dot{\mathbb{H}}_o)_{xyz} = I_{xx}\ddot{\phi}\hat{x} + I_{\parallel}\dot{v}\hat{Z}(\phi)$$

Men $M_{inf}(\phi)\hat{Z}(\phi)$ har ingen projektion på $\hat{z}(\phi)$ och således förändras inte v under pendelrörelsen $\Rightarrow \dot{v} = 0$.

Vi har således ekvationen

$$-mgl\sin\phi\,\hat{x} + M_{inf}(\phi)\,\hat{X}(\phi) = I_{xx}\ddot{\phi}\,\hat{x} + I_{\parallel}v\dot{\phi}\,\hat{X}(\phi),$$

vilken har "lösningen"

$$M_{inf}(\phi) = \dot{\phi} I_{\parallel} v \qquad (1)$$

$$-mgl\sin\phi = I_{xx}\ddot{\phi} \qquad (2)$$

<u>Svar</u>:

Spinnet är konstant och påverkar inte pendelrörelsen ty (2) är rörelseekv. för en pendel. Vidare ges $M_{inf}(\phi)$ av

$$M_{inf}(\phi) = \dot{\phi} I_{\parallel} v.$$