

## Inlämningsuppgift i Mekanik F del B 1998, omgång 1

En fjäder brukar i mekanikproblem betraktas som något som bara har en frihetsgrad, längden, och som ger en kraft proportionell mot förlängningen. Detta svarar mot att varje liten del av fjädern förlängs lika mycket (i förhållande till sin längd) i varje ögonblick. För en verklig fjäder behöver det inte vara sant; om t.ex. en kraft plötsligen appliceras i fjäderns ände, tar det en viss tid för den resulterande vågen att fortplanta sig genom fjädern, så om kraften varierar väsentligt på tidsskalan  $L/u$ , där  $L$  är fjäderns längd och  $u$  ljudhastigheten (hastigheten för longitudinella — längsgående — svängningar) i fjädern, betar den sig inte på det enkla sättet ovan. Det är fortfarande en linjär situation, varje liten del av fjädern betar sig linjärt, men man kan inte längre strunta i fjäderns "inre frihetsgrader". Det här gäller förstås vad som helst som betar sig som en fjäder, dvs. linjärt, vilket är sant med god noggrannhet för många fasta material.

Ett sätt att förstå vad som händer i situationer som ovan är att se fjädern som bestående av ett stort antal ( $N$ ) lika masspunkter förknippade med likadana masslösa fjädrar. Skriv ned lagrange-funktionen för ett sådant system, med förskjutningarna  $y_i$  hos masspunkterna från jämviktslägena som koordinater! För enkelhets skull kan vi se ändarna som fixerade. Var noggrann med att välja massorna och de små fjädrarnas fjäderkonstanter så att hela fjäderns massa och fjäderkonstant blir oberoende av  $N$ ! Genom att låta  $N \rightarrow \infty$ , visa att verkan för en kontinuerlig fjäder (eller stav) är

$$S = \frac{M}{2L} \int dt dx \left( \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - u^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)$$

(man kan använda diskreta approximationer för derivata och andraderivata,  $y'(x) \approx \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$ ,  $y''(x) \approx \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$ ). Försök att argumentera för att  $u$  verkligen är ljudhastigheten i materialet i staven.

Ljudhastigheten är en egenskap hos materialet i sig, och beror inte på stavens dimensioner. Uttryck den i de relevanta storheterna, elasticitetsmodulen och densiteten!

Välj ett material, leta reda på uppgifter om elasticitetsmodul, densitet och ljudhastighet, och kontrollera sambandet!

Bestäm de tillåtna egenfrekvenserna hos staven/fjädern (då ändarna är fixerade i  $y(0, t) = 0$ ,  $y(L, t) = 0$ , kan varje möjlig svängning skrivas som  $y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$ , och denna ansats kan sättas in i rörelseekvationen)!

Med det material du valde ovan, designa en stav vars grundfrekvens ger ett normal-a (440 Hz) (stämgaflar konstrueras inte på detta sätt — de svänger transversellt)!

Lämnas in senast torsdag 2 april, till någon lärare eller i en låda utanför O7114. Lycka till!

/Martin Cederwall, 22 mars 1998