Förslag till lösning på inlämningsuppgift i Mekanik F del B 1998, omgång 1

Låt fjädern/staven bestå av N stycken masspunkter, vardera med massan m/N, förbundna med sina grannar (och de fixerade väggarna) via $N+1$ stycken lätta fjädrar, vardera med fjäderkonstanten $(N+1)k$, där m är stavens hela massa, och k dess fjäderkonstant (kom ihåg, och förstå, att den inversa fjäderkonstanten adderas vid "seriekoppling" av fjädrar). Kalla stavens längd för L.

Vi vill först skriva ned lagrangefunktionen för systemet. Den kinetiska energin härrör helt från massornas rörelser, dvs. om förskjutningarna från jämviktslägena kallas y_i, $i=1\ldots N$, så är

$$K=\sum_{i=0}^{N}\frac{m}{2N}(\dot{y}_i)^2\ . \tag{1.1}$$

Den potentiella energin sitter i fjädrarna, vars förlängningar är skillnaden mellan förskjutningarna hos de närliggande massorna, så att

$$\begin{aligned}V&=\frac{(N+1)k}{2}\left\{{y_1}^2+(y_2-y_1)^2+(y_3-y_2)^2+\ldots+(y_N-y_{N-1})^2+{y_N}^2\right\}\\&=\frac{(N+1)k}{2}\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \ldots & y_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & \\ & & & & \ldots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N\end{bmatrix}\ .\end{aligned}\tag{1.2}$$

Vi tänker nu på $\{y_i\}$ som en diskret approximation till en kontinuerlig funktion $y(x)$ som ger förskjutningen y i en kontinuerlig stav som funktion av en längsgående koordinat x (x parametriserar den odeformerade staven), så att $y(i\frac{L}{N+1})=y_i$. Vi kan också approximera derivator på $y(x)$ med

$$\begin{aligned}y'(x)|_{x=i\frac{L}{N+1}}&\approx\frac{N+1}{L}(y_{i+1}-y_i)\ ,\\ y''(x)|_{x=i\frac{L}{N+1}}&\approx\Big(\frac{N+1}{L}\Big)^2(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})\ .\end{aligned}$$

Integraler över x-koordinaten approximeras med Riemann-summor. De integraler som reproducerar strukturen hos summorna i kinetiska och potentiella energierna är:

$$\begin{aligned}\int_0^L dx\,(\dot{y}(x))^2&\approx\sum_{i=1}^{N}\frac{L}{N+1}(\dot{y}_i)^2\ ,\\ \int_0^L dx\,y(x)y''(x)&\approx\sum_{i=1}^{N}\frac{L}{N+1}y_i\Big(\frac{N+1}{L}\Big)^2(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})\end{aligned}\tag{1.3}$$

(vill man vara riktigt petig kan man sätta $y_0 = 0 = y_{N+1}$ så att den andra integralen fungerar i ändarna).

Genom att jämföra ekvationerna (1.1) och (1.2) med ekvation (1.3) kan man alltså skriva energierna i kontinuumgränsen som

$$K = \frac{M}{2L} \int_0^L dx\, (\dot{y}(x))^2 \ ,$$
$$V = -\frac{k}{2L} \int_0^L dx\, y(x) y''(x) = \frac{kL}{2} \int dx\, (y'(x))^2 \ ,$$

så att lagrangefunktionen blir

$$L = K - V = \frac{M}{2L} \int_0^L dx \left((\dot{y}(x))^2 - \frac{kL^2}{M} (y'(x))^2 \right) \ .$$

Rörelseekvationen (“fältekvationen”) för förskjutningen är

$$\ddot{y}(x) - u^2 y''(x) = 0 \ ,$$

där $u = \sqrt{\frac{kL^2}{M}}$. u har rätt dimensioner för att vara en hastighet. Att den är ljudhastigheten i mediet kan vi se genom att observera att varje våg av formen $y(x,t) = f(x \pm ut)$ är en lösning (så länge den inte krockar med någon rand).

Parametrarna k och M beror ju på stavens geometri, men vi kan uttrycka dem i termer av materialegenskaper. Fjäderkonstanten är proportionell mot tvärsnittsarean och omvänt proportionell mot längden på staven, $k = EA/L$, där E är elasticitetsmodulen. Massan ges av $M = LA\varrho$, där ϱ är densiteten. Insättning i uttrycket ovan för ljudhastigheten ger

$$u = \sqrt{\frac{EA}{L} L^2 \frac{1}{LA\varrho}} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \ .$$

Då stavens ändar är fixerade, så att förskjutningen y är noll iändpunkterna, kan vi ansätta en lösning $y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$. Insättning av ansatsen i rörelseekvationen ger en ekvation för varje mod i utvecklingen, $\ddot{y}_n + (\frac{n\pi u}{L})^2 y_n = 0$. Lösningarnas vinkelfrekvenser kan läsas av direkt, $\omega_n = \frac{n\pi u}{L} = n\pi\sqrt{\frac{k}{M}}$.

Jag tänkte tillverka min fiktiva stav av aluminium. Jag har med avsikt tagit data från olika ställen, för att inte riskera att något av värdena är uträknat. Densiteten för aluminium är ungefär 2700 kg/m^3,[*] och elasticitetsmodulen 7.3$\times$10^{10} Pa.[†] Ljudhastigheten är ungefär 5100 m/s.[‡] Den ljudhastighet man räknar ut från E och ϱ blir c:a 5092 m/s $\approx$ 5.1 km/s. Bra överensstämmelse.

För att den lägsta frekvensen i min stav skall vara 440 Hz, måste den ha en längd på c:a 5.8 m.

/Martin Cederwall, 23 mars 1998.

[*] http://www.apo.nmsu.edu/Telescopes/SDSS/eng.papers/19950926_ConversionFactors/19950926_MProperties.html

[†] http://bvsd.k12.co.us/schools/BHS/science/physics/reference/measured/elastic.html

[‡] http://teacher.nsrl.rochester.edu/phy_labs/Speed_of_Sound/Speed_of_Sound.html