Förslag till lösning på inlämningsuppgift i Mekanik F del B 1998, omgång 2

1. Den lagrade energin i ett svänghjul är $E = \frac{1}{2}I\omega^2$, medan gyroeffekterna typiskt ges av ett vridande moment $\tau_s \sim I\omega\Omega$, där Ω är hur fort bussen svänger (detta gäller för en horisontell rotationsaxel; om den är vertikal finns inga gyroeffekter vid plan körning, däremot ett vridande moment då svänghjulet laddas upp eller ur). Vi kan alltså skriva $\tau_s \sim \Omega\sqrt{2IE}$, så för att minska gyroeffekterna är det fördelaktigt att använda ett svänghjul med mindre tröghetsmoment och i stället låta det rotera fortare. Detta sagt utan hänsyn till de begränsningar som konstruktionen av överföringsmekanismen och hållfastheten ställer. En lämplig orientering av svänghjulet kan vara en där gyroeffekterna (till en del) kompenserar centrifugalkrafter, dvs. åt höger. Å andra sidan har man ett vridande moment från centrifugalkraften vid kurvtagning som är $\tau_c = \frac{Mv^2}{R}h$, där M är bussens massa, v dess hastighet, R kurvradien och h bussens tyngdpunkts höjd över marken. Detta kan ju inte kompensera $\tau_s \sim \frac{v}{R}\sqrt{2IE}$ om inte den lagrade energin är proportionell mot v^2, vilket ju helt strider mot det ursprungliga syftet med apparaten. Nu har vi istället mest energi lagrad för små hastigheter. Exempel på grovt tillyxade numeriska värden:

   $$M = 10^4 \text{ kg}$$
   $$R = 10 \text{ m}$$
   $$v = 10 \text{ m/s}$$
   $$h = 1 \text{ m}$$

   Bussens rörelseenergi ligger i storleksordningen 5×10^5 J. En "meningsfull" lagrad energi borde ligga uppåt 10^5 J. Det vridande momentet p.g.a. centrifugalkraften är c:a 10^5 Nm. Om man kräver att τ_s är ganska mycket mindre, maximalt sådär 10^5 Nm, får man ha ett tröghetsmoment på svänghjulet som är högst c:a 5×10^2 kgm^2, och en vinkelfrekvens som är högre än c:a 20 s^{-1}. Detta verkar ju görligt, men å andra sidan får man ju tänka på att svänghjulet skall ge en nettoenergivinst, så att det inte kostar lika mycket att accelerera det när bussen accelererar. Det gör att dess massa måste vara så liten att $\frac{1}{2}mv^2$ är ganska mycket mindre än E. Så massan får nog inte vara större än några hundra kilo. Om man sätter en (utrymmesmässig) övre gräns på svänghjulets radie på en halvmeter, så får man ett I som är klart mindre än den övre gränsen ovan, och man lär inte få bekymmer med konstiga gyrokrafter, men kanske med konstruktionen av överföringen, eftersom ω behöver bli ännu större.

2. Hänvisar till de fina bilderna i Kleppner–Kolenkow, t.ex.

3. Jag börjar med att strunta i centrifugalkraften p.g.a. jordens rotation, den bidrager tillsammans med tyngdkraften till att definiera normalen till mitt horisontella plan. Corioliskraften är $\mathbb{F} = -2m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$, men om rörelsen endast försiggår horisontellt kommer endast vertikalkomponenten av $\mathbf{\Omega}$ in, vars belopp är $\Omega \sin \lambda$ (λ är latituden). Den horisontella komponenten av kraften blir $F_H = -2mv\Omega \sin \lambda$ riktad "åt höger" i förhållande till hastigheten. Så länge rörelsen försiggår på ungefär samma latitud är den konstant för konstant v, och kan balanseras av en centrifugalkraft mv^2/r, där r är radien för cirkeln partikeln beskriver. Radien blir då

$$r = \frac{v}{2\Omega \sin \lambda} \ .$$

På sextionde breddgraden får man numeriskt

$$r \approx \frac{v}{1 \text{ m/s}} \times 8 \text{ km} \ ,$$

helt försumbart i "vardagliga" sammanhang (som bekant).

/Martin Cederwall, 4 maj 1998.