Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Tisdagen 20 oktober 2009, 8.30-12.30

---

1. a) 4π

   b) $v_i = 0$

   c) $a = \frac{2}{\pi\epsilon}$

2. Om man sätter in en planvåg $\psi = A\exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t))$ i ekvationen får man $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

3. Fältet är singulärt på z-axeln, där det har en linjekälltäthet -2π. Om vi sluter ytan med cirkelskivan S_1, $x^2+y^2=4$, $z=0$ med normalen nedåt, kan vi använda Gauss sats. Kalla den sökta integralen I. Vi får $I + \int_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{F}dV$. Ytintegralen över S_1 ger noll direkt. Divergensen av fältet är $\nabla\cdot\vec{F} = 1-2\pi\delta^2(\vec{\rho})$, så volymintegralen av den första termen ger volymen, som är $\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}$, och den andra ger linjekälltätheten gånger den inneslutna längden, dvs. $-2\pi\cdot\sqrt{2}$. Alltså är $I = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} - 2\sqrt{2}\pi = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

4. Vi kan använda Greensfunktionsmetoden. I två dimensioner är $G(\vec{r},\vec{r}_0) = -\frac{1}{2\pi}\log|\vec{r}-\vec{r}_0|$ (+ någon konstant, eventuellt). Potentialen blir

$$\phi(x,y) = -\frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{-a}^{a} dy_0\,\log\sqrt{x^2+(y-y_0)^2} = -\frac{\sigma_0}{4\pi}\int_{-a-y}^{a-y} dz\,\log(z^2+x^2)$$

där vi har bytt integrationsvariabel till $z = y_0 - y$. Med hjälp av $\int\log(t^2+c^2)dt = t\log(t^2+c^2) - 2t + 2c\arctan\frac{t}{c}$ får man

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= -\frac{\sigma_0}{4\pi}\left[z\log(z^2+x^2) - 2z + 2x\arctan\frac{z}{x}\right]_{z=-a-y}^{a-y}\\ &= -\frac{\sigma_0}{4\pi}\Big((y-a)\log((y-a)^2+x^2) - (y+a)\log((y+a)^2+x^2) + 4a\\ &\quad - 2x\arctan\frac{y-a}{x} + 2x\arctan\frac{y+a}{x}\Big).\end{aligned}$$

Den konstanta termen är irrelevant. Det är bättre av dimensionsskäl att skriva termerna

$$\mp(y\pm a)\log((y\pm a)^2+x^2) = \mp(y\pm a)\log\frac{(y\pm a)^2+x^2}{a^2} \pm 2(y\pm a)\log a\,,$$

och slänga konstanta termer, så att

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= -\frac{\sigma_0}{4\pi}\left[z\log(z^2+x^2) - 2z + 2x\arctan\frac{z}{x}\right]_{z=-a-y}^{a-y}\\ &= -\frac{\sigma_0}{4\pi}\Big((y-a)\log\frac{(y-a)^2+x^2}{a^2} - (y+a)\log\frac{(y+a)^2+x^2}{a^2}\\ &\quad - 2x\arctan\frac{y-a}{x} + 2x\arctan\frac{y+a}{x}\Big).\end{aligned}$$

Alla termer utom de med arctan är kontinuerligt deriverbara nära linjekällan. När $x \to 0$ går argumentet för arctan mot $\pm\infty$. $\lim_{r\to\pm\infty} \arctan r = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,(r)$. Så nära $x = 0$ ger de termerna bidrag till potentialen $\frac{\sigma_0 x}{4}\mathrm{sign}\,(x)(\mathrm{sign}\,(y-a) - \mathrm{sign}\,(y+a))$. Detta är $-\frac{\sigma_0|x|}{2}$ för $|y| < a$ och noll annars, vilket ger rätt diskontinuitet i F_x.

5. T.ex.: Det finns en punktkälla i volymen. Då måste (Gauss sats) $\int_{\partial V}(-\nabla\phi)\cdot d\vec{S} = q$. Men det strider mot randvillkoret $\nabla\phi\cdot\vec{n} = 0$. Fysikalisk tolkning (t.ex.): Det strömmar ut inkompressibel vätska ur punktkällan. Vart skall den ta vägen? Om randvillkoret förbjuder den att gå ut genom randen finns det ingenstans den kan flöda.

6. Hela problemet är tvådimensionellt, så vi betraktar tvådimensionell potentialströmning runt en cirkel. Hastighetsfältet är $\vec{u} = -\nabla\phi$ där $\Delta\phi = 0$. Långt från cirkeln är $\vec{u} = u_0\hat{x}$ och alltså $\phi = -u_0 x = -u_0\varrho\cos\alpha$. Med en ansats $\phi = f(\varrho)\cos\alpha$ fås (m.h.a. uttrycket för Laplaceoperatorn i polära koordinater) $\Delta\phi = (\varrho^{-1}(\varrho f')' - \varrho^{-2})\cos\alpha = 0$. Ansatsen $f(\varrho) = c\varrho^p$ leder till $p^2 - 1 = 0$, $p = \pm 1$. Vi har alltså

$$\phi = \left(A\varrho + \frac{B}{\varrho}\right)\cos\alpha\,.$$

Villkoret i oändligheten ger $A = -u_0$. På randen $\varrho = R$ gäller Neumanns randvillkor $\frac{\partial\phi}{\partial\varrho} = 0$, som ger $B = -u_0R^2$. Alltså är potentialen

$$\phi = -u_0\left(\varrho + \frac{R^2}{\varrho}\right)\cos\alpha\,,$$

och hastighetsfältet blir

$$\vec{u} = -\nabla\phi = u_0\left[\hat{\varrho}\left(1 - \frac{R^2}{\varrho^2}\right)\cos\alpha - \hat{\alpha}\left(1 + \frac{R^2}{\varrho^2}\right)\sin\alpha\right]\,.$$