Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Tisdagen 20 oktober 2009, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 30 poäng, för betyg 4 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, poängen från datoruppgifterna inräknad. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är begränsningsytan till kuben med sidlängden 4 och mittpunkt i origo, vars kanter är parallella med koordinataxlarna, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = \frac{\vec{r}-\hat{x}}{|\vec{r}-\hat{x}|^3}$?

b) A_{ij} är en antisymmetrisk tensor. Beräkna vektorn $v_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}\epsilon_{knp}A_{lm}A_{np}$.

c) Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} a\cos^2\frac{x}{\epsilon}\,, & |x| \leq \frac{\pi\epsilon}{2} \\ 0\,, & |x| > \frac{\pi\epsilon}{2} \end{cases}$$

närmar sig en deltafunktion $\delta(x)$ då $\epsilon \to 0^+$ (a kan eventuellt bero på ϵ).

2. Schrödingerekvationen för vågfunktionen Ψ som beskriver en fri partikel med massan m lyder

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\Psi = 0 \quad ,$$

där $\hbar$ är Plancks konstant dividerad med 2π. Vilken dispersionsrelation, dvs. relation mellan vinkelfrekvens ω och vågtal $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ för en plan våg leder denna ekvation till?
(10 poäng)

3. Beräkna ytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F}$ är vektorfältet

$$\vec{F} = z\hat{z} - \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{x^2 + y^2}$$

och S är den del av ellipsoiden $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ som har $z > 0$ och och normalen riktad så att $\vec{n} \cdot \hat{z} > 0$.
(10 poäng)

4. I två dimensioner, bestäm potentialen från en homogen linjekälla med linjekälltäthet σ_0 på y-axeln mellan $y = -a$ och $y = a$. Kontrollera att din lösning uppfyller att x-komponenten av vektorfältet $\vec{F} = -\nabla\phi$ är diskontinuerlig enligt:

$$F_x(0^+, y) - F_x(0^-, y) = \begin{cases} \sigma_0\,, & |y| < a\,, \\ 0\,, & |y| > a\,. \end{cases}$$

(10 poäng)

5. Låt V vara en begränsad volym (dvs. ∂V är en sluten yta) som innehåller punkten $\vec{r} = \vec{a}$. Betrakta Poissons ekvation $\Delta\phi(\vec{r}) = -q\delta^3(\vec{r} - \vec{a})$ med Neumanns homogena randvillkor på ∂V. Visa eller argumentera övertygande för att det inte finns någon lösning. Ge något exempel på fysikalisk tolkning av ekvationen och randvillkoret som visar det orimliga i frågeställningen.
(10 poäng)

6. Bestäm hastighetsfältet för stationärt potentialflöde runt en oändligt lång cylinder med radien R och z-axeln som symmetriaxel, då hastighetsfältet långt från cylindern är $\vec{u} = u_0\hat{x}$.
(10 poäng)

En primitiv funktion som kan vara användbar:

$$\int \log(t^2 + c^2)dt = t\log(t^2 + c^2) - 2t + 2c\arctan\frac{t}{c}\,.$$