Lösningar till övningstentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM
Oktober 2009

---

1. a) 1

   b) 2

   c) 4

3. Den första termen i $\vec{F}$ känns igen som fältet från en virveltråd med styrkan 2π på linjen $x = 1$, $y = 0$. Eftersom $z = 0$ och $\hat{z} \cdot d\vec{r} = 0$ bidrager inte termerna $-\hat{\alpha} z \sin\alpha + \hat{z} \cos\alpha$. Resten av $\vec{F}$, dvs. $\hat{\varrho}(1 - \varrho)e^{-\varrho} \sin\alpha + \hat{\alpha} e^{-\varrho} \cos\alpha$, är rotationsfritt, vilket ses genom explicit uträkning av rotationen i cylindriska koordinater (eller så ser man att det är gradienten av $\varrho e^{-\varrho} \sin\alpha$). Kurvan C omsluter virveltråden två varv i positiv riktning. Värdet av integralen är därför $2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

4. T.ex.: Om ϕ uppfyller Laplaces ekvation är fältstyrkan $\nabla\phi$ divergensfri. Det finns alltså inga källor. Gauss sats säger att för en sluten yta $\int_{\partial V} \nabla\phi \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\phi$=0. Om det finns slutna ekvipotentialytor får man alltså att flödet genom dem är noll. Men på en ekvipotentialyta S är $\vec{n} = \pm\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ med samma tecken på hela ytan. Man får $\int_S |\nabla\phi| dS = 0$ på varje ekvipotentialyta, och därför $\nabla\phi = 0$.

   Eller: Om $S = \partial V$ är en sluten ekvipotentialyta är ϕ en lösning till Laplaces ekvation med randvillkoret $\phi = \phi_0$ på S. Betrakta istället fältet $\psi = \phi - \phi_0$, som lyder Dirichlets homogena randvillkor. Vi använder $\nabla \cdot (\psi\nabla\psi) = |\nabla\psi|^2 + \psi\Delta\psi = |\nabla\psi|^2$. Gauss sats ger $\int_V |\nabla\psi|^2 = \int_{\partial V} \psi\nabla\psi \cdot d\vec{S} = 0$, så $\psi = 0$ innanför varje ekvipotentialyta.

   (Kommentar: Påståendet, och argumenten, håller i $\mathbb{R}^3$, men inte om området man löser Laplace ekvation har mer en en rand, t.ex. om det är området mellan två koncentriska sfärer.)

5. Inget i problemställningen beror på z, så vi betraktar det som ett 2-dimensionellt problem. Den elektrostatiska potentialen uppfyller Laplaces ekvation på cirkelskivan $\varrho < a$. En rimlig ansats är $\phi(\varrho, \alpha) = f(\varrho) \cos 2\alpha$. Laplaces ekvation säger

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial\varrho} \left(\varrho \frac{\partial\phi}{\partial\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2} = \varrho^{-1}(\varrho f'(\varrho))' \cos 2\alpha - 4\varrho^{-2} f(\varrho) \cos 2\alpha \,.$$

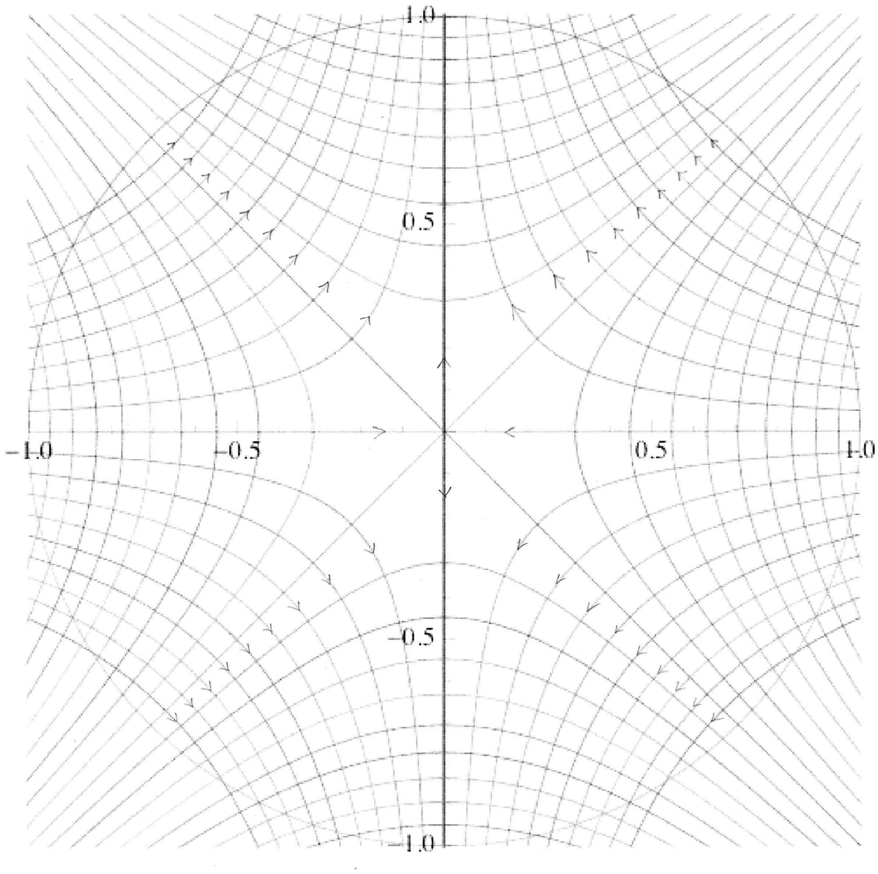
   En ansats $f(\varrho) = A\varrho^p$ ger $p^2 - 4 = 0$, $p = \pm 2$. Minustecknet ger ett singulärt fält. Randvillkoret ger $A = \frac{\phi_0}{a^2}$. Potentialen är

$$\phi = \phi_0 \frac{\varrho^2}{a^2} \cos 2\alpha = \phi_0 \frac{x^2 - y^2}{a^2} \,.$$

   (Från det senare uttrycket är det uppenbart att ϕ löser $\Delta\phi = 0$.) Det elektriska fältet är

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{2\phi_0 \varrho}{a^2}(-\hat{\varrho} \cos 2\alpha + \hat{\alpha} \sin 2\alpha) = -\frac{2\phi_0}{a^2}(x\hat{x} - y\hat{y}) \,.$$

   Ekvipotentialytorna är hyperbler $x^2 - y^2 =$ konstant. Fältlinjerna är hyperbler $xy =$ konstant.



6. Temperaturen vid tiden $t > 0$ ges m.h.a. Greensfunktionen och begynnelsevärdet av

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} T_0 \frac{y}{a} \, .$$

Byt integrationsvariabel till $z = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$.

$$T(x,t) = \frac{T_0}{a} \sqrt{4kt} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} dz (z\sqrt{4kt} + x) e^{-z^2} \, .$$

Vi använder $\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi}$ och $\int_{-\infty}^{\infty} dz z e^{-z^2} = 0$, vilket ger $T(x,t) = T_0 \frac{x}{a}$.